

UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de Montpellier
pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

SUR LA RESISTANCE OPPOSÉE PAR UN FLUIDE
AU MOUVEMENT D'UN SYSTEME INDÉFORMABLE
(FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE EN MOUVEMENT PLAN IRROTATIONNEL)

par

Pierre CAPODANNO

Agrégé des Sciences Mathématiques

soutenue le 28 Mai 1966 devant la Commission d'Examen

Jury : MM. G. COUCHET Président

L. GAUTHIER }
J.J. MOREAU } Assesseurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551915_0006

UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de Montpellier
pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

**SUR LA RESISTANCE OPPOSÉE PAR UN FLUIDE
AU MOUVEMENT D'UN SYSTEME INDÉFORMABLE
(FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE EN MOUVEMENT PLAN IRROTATIONNEL)**

par

Pierre CAPODANNO

Agrégé des Sciences Mathématiques

soutenue le 28 Mai 1966 devant la Commission d'Examen

Jury : MM. G. COUCHET Président

L. GAUTHIER
J. J. MOREAU } Assesseurs



FACULTE DES SCIENCES
DE
MONTPELLIER

LISTE DES PROFESSEURS

DOYEN : B. CHARLES

ASSESSEURS : R. JOUTY - J. FALGUEIRETTES

DOYEN HONORAIRE : P. MATHIAS

PROFESSEURS HONORAIRES : R. JACQUES E. TURRIERE J. GRANIER
M. CASTERAS J. SOULA
E. CARRIERE G. DENIZOT

PROFESSEURS TITULAIRES :

M. MOUSSERON	Chimie Organique
M. L. EMBERGER	Botanique
M. Ch. BOUHET	Physique
M. P. MATHIAS	Zoologie et Biologie Générale
M. J.P. ROIG	Physique
M. P. CHATELAIN	Minéralogie et Cristallographie
Mle. O. TUZET	Zoologie
Mle. G. CAUQUIL	Chimie
M. G. COUCHET	Mécanique Supérieure
M. J. SALVINIEN	Chimie-Physique
Mle. A.M. VERGNOUX	Physique
M. J. AVIAS	Géologie
M. P. VIELES	Chimie
M. J. RABINOVICH	Physique (C.S.U. P.)
M. E. KAHANE	Chimie Biologique
M. J.J. MOREAU	Mécanique Rationnelle
M. B. CHARLES	Mathématiques Pures
M. J. MOTTE	Biologie Végétale
M. R. JOUTY	Physique
M. P. DUMONTET	Physique
M. R. LEGENDRE	Zoologie
M. I. ASSENMACHER	Physiologie Animale
M. A. CASADEVALL	Chimie Organique
M. B. PISTOULET	Physique
M. Ch. ROUMIEU	Analyse Supérieure
M. A. POTIER	Chimie Minérale
M. R. LAFONT	Physique
M. R. JACQUIER	Chimie
M. J. FALGUEIRETTES	Minéralogie
Mme. J. CHARLES	Mathématiques
M. P. CAILLON	Physique
M. R. ROUZAUD	Chimie
M. Ch. SAUVAGE	Botanique
M. H. CHRISTOL	Chimie (E.N.S.I.)
M. A. MARTINEAU	Mathématiques

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

Mme. M. L. de POUQUES	Botanique (C.S.U. P.)
M. P. MURAOUR	Géophysique Appliquée
Mme. M. LAFON	Mathématiques
M. M. MATTAUER	Géologie
M. G. TOURNE	Chimie
M. L. EUZET	Zoologie (C.S.U. P.)
M. J. REMY	Géologie
Mme. G. VERNET	Biologie Animale
M. H. ANDRILLAT	Astronomie
M. P. DEMANGEON	Géologie
M. A. BONNET	Botanique
M. A. SAVELLI	Physique
M. G. DELOUPY	Physique
M. L. GRAMBAST	Botanique
M. J. P. LAFON	Mathématiques
Mme. Ch. DUBOUL-RAZAVET	Géologie (C.S.U. P.)
M. E. GROUBERT	Physique
Mme. H. GUASTALLA	Biologie Physico-Chimique

MAITRES DE CONFERENCES :

M. A. STEINER	Psychophysiologie
M. G. LAMATY	Chimie
M. R. GAUFRES	Chimie
M. F. PROUST	Géologie
M. A. BASSOMPIERRE	Physique
M. R. MARTY	Physiologie Animale
M. M. MAURIN	Chimie
M. J. J. SOULIER	Chimie (C.S.U. P.)
M. J. PARIS	Biologie Animale (C.S.U. P.)
Mle. BAILLETTE	Mathématiques (C.S.U. P.)
M. N. ROBY	Mathématiques (C.S.U. P.)
M. P. MOLINO	Mathématiques
Mle. N. PIREYRE	Physiologie Végétale
M. L. CECCHI	Physique
M. F. DURAND	Chimie (C.S.U. P.)
M. G. BOUGNOT	Physique
M. Y. GUITTON	Physiologie Végétale (C.S.U. P.)
M. F. BOMBRE	Physique (C.S.U. P.)

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS :

M. M. LEFRANC	Mathématiques
M. A. STURER	Mathématiques

SECRETAIRE PRINCIPAL :

M. E. SIAU

I N T R O D U C T I O N

La détermination des efforts exercés par un fluide parfait incompressible sur un profil ou un ensemble de profils a fait l'objet de très nombreux travaux que nous allons rapidement résumer en partant de ceux de Lord KELVIN et en mettant surtout l'accent sur le cas des fluides en mouvement irrotationnel.

Lord KELVIN introduisit, dans le cas d'un fluide parfait illimité en mouvement irrotationnel, des grandeurs vectorielles jouant le rôle de la résultante cinétique et du moment cinétique du fluide, non définis en l'occurrence, dont les dérivées temporelles conduisent à la résultante et au moment résultant des efforts aérodynamiques (théorie de l'impulse).

En 1902, KUTTA montre, dans sa thèse, que l'on peut admettre un potentiel non uniforme pour un fluide en mouvement irrotationnel et introduit une circulation. Plus tard, il déterminera le potentiel complexe et les efforts globaux dans les cas très particuliers du biplan en tandem et du biplan droit en translation uniforme.

C'est en 1905 que JOUKOWSKY publie son théorème bien connu qui, pour une translation uniforme, relie la circulation à la résultante aérodynamique et détermine cette circulation pour un profil à pointe. A peu près à la même époque, cet auteur s'intéresse au problème des "grilles" de profils (suite infinie de profils

obtenue par la répétition périodique de l'un d'eux).

En 1911 et 1921, H. VILLAT publie deux mémoires sur le problème de Dirichlet dans une aire annulaire [VILLAT 1] et la représentation conforme des aires doublement connexes [VILLAT 2] dont l'importance est capitale pour la résolution rigoureuse du problème du biplan.

L'étude des efforts aérodynamiques qui agissent sur un profil à pointe en mouvement varié semble remonter à BIRNBAUM (1923) et WAGNER (1924). L'hypothèse de JOUKOWSKY conduit alors à un échappement tourbillonnaire. Les théories développées à ce sujet permettent de calculer approximativement la vitesse critique d'une aile.

Les efforts aérodynamiques qui agissent sur un biplan en translation uniforme sont calculés approximativement en utilisant un "tourbillon de remplacement" [Eck : 1921 ; Pistolesi -]. Voir Pistolesi 1|.

En 1928, CARAFOLI étudie le mouvement plan d'un fluide parfait incompressible en présence d'un profil en rotation et calcule les efforts dans le cas de la rotation uniforme.

Aux environs de 1930, la théorie du biplan prend un nouvel essor avec les travaux de LAGALLY qui détermine l'écoulement autour de deux cercles extérieurs l'un à l'autre avec des circulations données [Lagally 1 ; 1929] , de FERRARI qui effectue la transformation conforme de deux cercles en deux profils d'ailes analogues à ceux de JOUKOWSKY [FERRARI 1 ; 1930] , de DUPONT qui traite

les problèmes précédents par des méthodes d'approximations successives [DUPONT 1 ; 1931 ; voir aussi PISTOLESI 1], de GIRERD qui fait une étude expérimentale du biplan d'envergure infinie [GIRERD 1; 1934], de TOUSSAINT qui, en utilisant les tourbillons de remplacement, fait d'intéressantes comparaisons entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux [TOUSSAINT 1 ; 1934] .

Nous notons ensuite de très importants travaux concernant l'obstacle isolé.

En 1929, J. PERES donne une généralisation des formules de BLASIUS pour des écoulements plans non permanents périodiques [PERES 1] ; en 1930, il fait une étude analogue pour le cas tridimensionnel [PERES 2]. Le mouvement d'un profil quelconque dans un fluide en repos à l'infini est étudié par J. PERES dans son Cours de Mécanique des Fluides où il donne l'expression du potentiel et de la résultante aérodynamique [PERES 3]. En 1935, J. PERES généralise la théorie des images pour un profil quelconque immergé dans un courant quelconque et donne l'expression de la circulation quand le profil présente une pointe. Cette étude permet, en particulier, de supprimer l'une des deux approximations que contient la théorie approchée du biplan qui utilise les tourbillons de remplacement [PERES 4] .

En 1935 également, L.I. SEDOV donne des formules permettant de calculer la résultante et le moment résultant des efforts aérodynamiques dans le cas d'un mouvement plan non stationnaire ;

quand la circulation autour du profil est nulle, il relie les efforts à la force vive du fluide ; quand elle est différente de zéro, il montre qu'il suffit d'ajouter aux efforts précédents la force de JOUKOWSKY relative au centre du profil. Le cas du profil à pointe avec échappement tourbillonnaire est examiné [SEDOV 1] .

Il convient de citer le mémoire de TOMOTIKA, NAGAMIYA et TAKENOUTI sur le calcul des efforts exercés sur une plaque en présence d'un mur rectiligne par un fluide parfait incompressible dont la vitesse à l'infini est parallèle au mur (1933) et celui de TOMOTIKA où est résolu le même problème pour une plaque placée entre deux murs rectilignes parallèles (1934) [TOMOTIKA 1 et 2] .

En 1945, G. COUCHET donne l'expression complète des efforts aérodynamiques agissant sur un profil en mouvement quelconque dans un fluide en repos ou en translation à l'infini, connaissant la représentation conforme de l'extérieur du profil sur l'extérieur d'un cercle. Il montre que la condition de KUTTA-JOUKOWSKY à la pointe d'un profil est compatible avec une classe très étendue de mouvements non stationnaires et il caractérise cinématiquement ces mouvements du profil [COUCHET 1 et 4] .

En 1947, J. LERAY donne une généralisation des formules de BLASIUS valable pour un courant plan contenant des tourbillons et contournant des profils fixes ou mobiles. Il applique les formules au calcul de la résistance éprouvée par un profil en présence d'un sillage de tourbillons alternés. [LERAY 1] .

En 1949, J.J. MOREAU établit des relations directes entre les efforts extérieurs et les éléments tourbillonnaires pour un fluide incompressible quelconque. Le cas bidimensionnel est examiné et, en particulier, l'auteur relie la quantité de mouvement d'un milieu incompressible remplissant le plan (fluide et obstacle immergés de même densité), au repos à l'infini, à la structure asymptotique de l'écoulement [MOREAU 1 et 2] .

G. COUCHET montre, en 1952, que l'on peut calculer les efforts aérodynamiques qui agissent sur un profil mobile en fonction des affixes des tourbillons libres qui peuvent exister, en nombre quelconque, dans le fluide et de quantités qui ne dépendent que de la forme et du mouvement du profil [COUCHET 2 , 4] . En 1960, il montre que les profils à centre de portance en mouvement irrotationnel non stationnaire subissent des efforts aérodynamiques équivalents aux forces d'inertie d'un solide [COUCHET 3] .

Dans la théorie du biplan, nous notons, d'une part, les travaux de Y. KOMATU qui donne une formule permettant le calcul du potentiel pour un multiplan en translation uniforme, achève les calculs dans le cas du biplan en utilisant la représentation conforme sur une couronne circulaire, mais laisse de côté le calcul des efforts aérodynamiques [1945 ; KOMATU 2] , d'autre part un mémoire de P. SCHMITT qui reprend la méthode de DUPONT et pousse jusqu'au calcul numérique [SCHMITT 1] .

La théorie des grilles a suscité ces derniers temps de très nombreuses publications qu'il est impossible d'analyser en

détail ici. Citons entre autres les travaux de L.C. WOODS (1954), H. SÖHNGEN (1955), K. NICKEL (1955), I.L. POPESCU (1958 et 1960),... Ces intéressantes recherches concernant souvent des cas particuliers (grilles de plaques) et les méthodes employées conduisent pour les efforts à des résultats approchés.

C'est un mémoire un peu antérieur de L. MALAVARD, R. SIESTRUNCK et P. GERMAIN [La Recherche aéronautique ; Juillet 1948] qui a inspiré nos premiers travaux sur les grilles. Nous déterminons complètement les efforts exercés sur un élément de la grille animée d'une translation variée (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 27 Janvier 1964). Un peu plus tard, nous résolvons le même problème pour une double grille symétrique en translation uniforme (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 4 Janvier 1965).

Nous abordons enfin le problème du biplan. Comme il ressort du rapide examen que nous venons de faire, les auteurs qui ont étudié cette question ont envisagé seulement le cas de la translation uniforme et, sauf dans des cas très particuliers, ils n'ont fait que des calculs approchés pour les efforts aérodynamiques.

L'objet essentiel du travail que nous présentons est la détermination rigoureuse du potentiel complexe et des efforts aérodynamiques globaux dans le cas général où le couple de profils est animé d'un mouvement arbitraire.

Dans le chapitre I, nous rappelons, en les complétant, quelques résultats concernant le multiplan. Nous mettons en évidence

la contribution des circulations et, dans le cas où les circulations sont nulles, des quantités jouant le rôle de la résultante cinétique et du moment cinétique du fluide quand on veut calculer les efforts par les théorèmes généraux de la Mécanique. Enfin, nous écrirons les équations du mouvement du multiplan soumis à des forces données.

Le calcul des efforts aérodynamiques ne peut être achevé dans le cas général, car nous ne connaissons pas le potentiel complexe. Ce dernier peut être déterminé dans le cas du couple de profils en utilisant la représentation conforme de l'extérieur du couple sur une couronne circulaire, qui fait l'objet du chapitre II. Nous y mettons la fonction assurant la représentation conforme sous différentes formes et traitons des cas particuliers.

Dans le chapitre III, nous calculons le potentiel complexe sans circulations en utilisant la méthode de H. VILLAT pour la résolution du problème de Dirichlet relatif à une couronne circulaire. La théorie des images hydrodynamiques nous permet ensuite d'obtenir le potentiel avec des circulations données autour des profils. Nous examinons enfin le cas des profils à pointe et montrons l'existence de mouvements non stationnaires sans échappement tourbillonnaire. Nous faisons l'étude cinématique de ces mouvements et traitons des cas remarquables.

Le chapitre IV est consacré au calcul des efforts aérodynamiques globaux. Les formules générales sont appliquées aux cas de la translation et de la rotation uniformes. Nous examinons enfin ce que donnent ces formules pour des couples de profils particuliers

par exemple profils symétriques par rapport à une droite : le problème de l'effet-sol est ainsi résolu .

Enfin, dans le chapitre V , nous montrons que le potentiel complexe et les efforts peuvent être calculés dans le cas d'un couple de profils sans pointe animé d'un mouvement arbitraire en présence d'un nombre fini de tourbillons libres. Nous terminons par quelques considérations relatives au cas du multiplan.

Monsieur le Professeur VILLAT, m'a fait l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences plusieurs notes sur mes travaux. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de mes respectueux sentiments.

Que Monsieur le Professeur GAUTHIER qui a bien voulu accepter la présidence du jury et qui m'a témoigné le plus bienveillant intérêt, accepte le témoignage de ma déférente reconnaissance.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ma profonde gratitude à mon maître, Monsieur le Professeur COUCHET qui a assuré mes premiers pas dans la recherche scientifique et qui m'a toujours entouré de ses conseils éclairés et de sa bienveillante sollicitude.

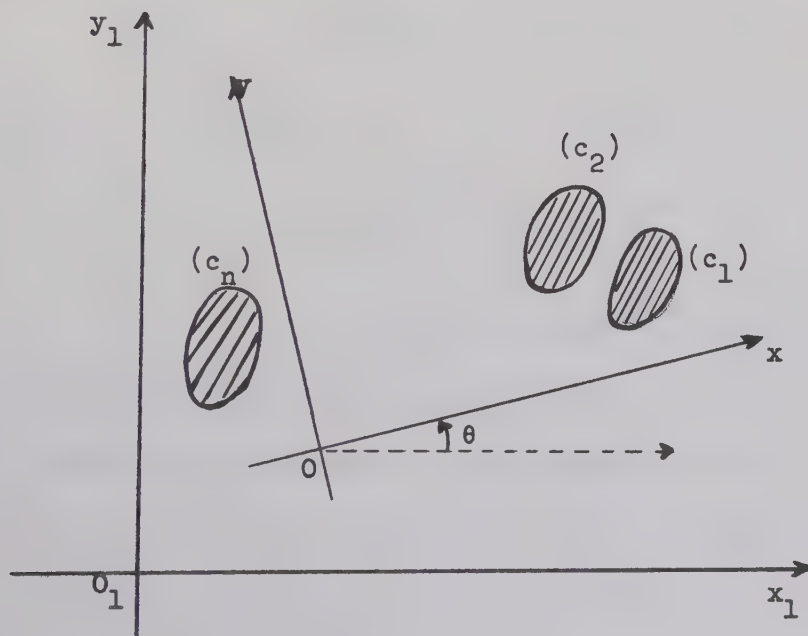
Que Monsieur le Professeur MOREAU qui a bien voulu me proposer le second sujet et qui n'a cessé de me prodiguer ses précieux conseils trouve ici l'expression de mes sentiments respectueusement reconnaissants.

Je voudrais enfin remercier Monsieur le Professeur SIESTRUNCK qui s'est particulièrement intéressé à mon travail et m'a procuré avec la plus grande amabilité une bonne partie de ma documentation.

Généralités sur le calcul des efforts aérodynamiques
qui s'exercent sur un multiplan.

Nous considérons un multiplan constitué par un nombre fini n de profils (c_1) , ..., (c_n) invariablement liés les uns aux autres, mobile dans un fluide parfait incompressible (masse spécifique ρ) en mouvement plan irrotationnel, au repos à l'infini.

Soient $O_1 x_1$, $O_1 y_1$ des axes orthonormés galiléens et Ox , Oy des axes orthonormés liés au multiplan. Le mouvement de ce dernier est défini par les composantes $\ell(t)$, $m(t)$ de la vitesse $\vec{V}_O$ du point O sur Ox , Oy et par la rotation instantanée $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{z}$ ($\vec{z}$ vecteur unitaire normal au plan $x O y$; si $\widehat{O_1 x_1, Ox} = \theta(t)$, $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$). [fig. 1].



[fig. 1]

1°) Les conditions aux limites.

Soit $f(z,t) = \phi(x,y,t) + i\psi(x,y,t)$ le potentiel complexe absolu ($z = x + iy$).

Ecrivons que la vitesse fluide relative au multiplan :

$$\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)} - (\ell + im) - i\omega z$$

est, le long des contours (c_k) , tangente à ces contours.

Nous obtenons :

$$\int_{(c_k)} \left[\left(\frac{df}{dz} - (\ell - im) + i\omega \bar{z} \right) dz \right] = 0$$

D'où :

$$(I.1.1) \quad \psi = -mx + \ell y - \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) + \phi_k(t) \quad \text{sur } (c_k)$$

2°) Les efforts globaux exercés par le fluide sur le multiplan :

Nous désignons par (c) la réunion des (c_k) .

Nous savons que les composantes X, Y sur les axes Ox, Oy de la résultante $\vec{R}$ et le moment résultant en O M_O^t des efforts globaux sont donnés par les formules :

$$X = - \int_c p \, dy \quad ; \quad Y = \int_c p \, dx$$

$$M_O^t = \int_c p (x \, dx + y \, dy)$$

où p désigne la pression.

L'utilisation de la formule classique fournissant la pression et des conditions aux limites (I.1.1) donne : [Lamb 1] .

$$(I.2.1) \quad X = \rho \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} dy - \rho \int_C (m + \omega x) d\phi$$

$$(I.2.2) \quad Y = -\rho \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + \rho \int_C (l - \omega y) d\phi$$

$$(I.2.3) \quad \mathcal{M}_0^t = -\rho \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} (x dx + y dy) + \rho \int_C (lx + my) d\phi$$

3°) Mise en évidence de la contribution des circulations.

a).- Appelons $f(z, t)$ le potentiel complexe avec circulations

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ autour des profils $(c_1), (c_2), \dots, (c_n)$ respectivement et donnant une vitesse nulle à l'infini. Choisissons à l'intérieur des profils des points $z_1, z_2, \dots, z_n$ et considérons la fonction uniforme :

$$g(z, t) = \phi + i\Psi = f(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi} \log(z - z_k)$$

où les ^{logarithmes} introduisent une vitesse nulle à l'infini. Sur (c) , nous devons avoir :

$$(I.3.1) \quad \begin{cases} \Im f = -mx + ly - \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) + \mathcal{C}(t) \\ \frac{d}{dn} [\Re f] = \alpha (l - \omega y) + \beta (m + \omega x) \end{cases}$$

(où α et β sont les composantes du vecteur unitaire normal), et par suite :

$$(I.3.2) \quad \begin{cases} \Psi = -mx + ly - \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) + \Im \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi} \log(z - z_k) + \mathcal{C}(t) \\ \frac{d\zeta}{dn} = \alpha (l - \omega y) + \beta (m + \omega x) + \Re \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi} \log(z - z_k) \end{cases}$$

$g(z, t)$ est donc déterminé par un problème de Dirichlet ou un problème de Neumann et $f(z, t)$ s'en déduit immédiatement. Reste à montrer que ce potentiel est unique à une fonction additive du temps près, ce qui

est immédiat. S'il existait un autre potentiel $F(z, t)$ avec les circulations Γ_k et satisfaisant aux conditions (I.3.1), $f - F$ serait uniforme et vérifierait sur (c) les conditions :

$$\mathcal{J} [f - F] = C(t) \quad ; \quad \frac{d [\mathcal{R}(f - F)]}{dn} = 0$$

Donc f et F ne diffèrent que par une fonction du temps.
D'après (I.3.2), la fonction g se met sous la forme :

$$g = l g_1 + m g_2 + \omega g_3 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k G_k$$

où les g_1, g_2, g_3, G_k sont uniformes.

D'où

$$f(z, t) = l g_1 + m g_2 + \omega g_3 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k F_k$$

$$\text{où} \quad \int_{c_i} d F_k = \delta_{ik}$$

et en prenant les parties réelles :

$$\phi(x, y, t) = l \phi_1 + m \phi_2 + \omega \phi_3 + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \Phi_k$$

$$\text{où} \quad \int_{c_i} d \Phi_k = \delta_{ik}$$

b).- Désignons par $X_0, Y_0, (\mathcal{M}_0^t)_0$ les composantes de la résultante $\vec{R}_0$ et le moment résultant en 0 dans le cas où les circulations sont nulles. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = X_0 - \rho \sum_{k=1}^n \int_{c_k} (m+nx) \Gamma_k d \Phi_k \\ Y = Y_0 + \rho \sum_{k=1}^n \int_{c_k} (l-ny) \Gamma_k d \Phi_k \\ \mathcal{M}_0^t = (\mathcal{M}_0^t)_0 + \rho \sum_{k=1}^n \int_{c_k} (lx+my) \Gamma_k d \Phi_k \end{array} \right.$$

Posons :

$$A_k = \int_{\Gamma_k} \dots$$

Les A_k sont des constantes qui ne dépendent que de la géométrie du multiplan.

Nous avons facilement

$$\begin{cases} X + iY = X_0 + iY_0 + \sum_{k=1}^n i\rho \Gamma_k (\lambda + i m + i n A_k) \\ M_0^t = (M_0^t) + \sum_{k=1}^n \rho \Gamma_k A_k (\lambda - i m) \end{cases}$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Quand il y a des circulations $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ autour des éléments du multiplan, on doit ajouter aux efforts correspondant au cas où les circulations sont nulles, les forces de Joukowski relatives à des points $A_1, \dots, A_n$.

Les efforts dans le cas où les circulations sont nulles.

Le résultat précédent montre qu'il suffit de faire le calcul des efforts dans ce cas.

Considérons le vecteur $\vec{B}$ dont les composantes sur Ox, Oy sont :

$$B_x = \rho \int_{\Gamma} y \, d\phi \quad ; \quad B_y = -\rho \int_{\Gamma} x \, d\phi$$

et le vecteur $\vec{I} = I \vec{z}$ où :

$$I = -\rho \int_{\Gamma} \frac{x^2 + y^2}{2} \, d\phi$$

Nous avons :

$$X_0 = -\frac{\partial X}{\partial t} + \rho B_y \quad ; \quad Y_0 = -\frac{\partial Y}{\partial t} - \rho B_x$$

$$(M_0^t) = -\frac{\partial I}{\partial t} + m B_x - n B_y$$

c'est-à-dire :

$$\vec{R}_O = - \frac{d\vec{B}}{dt} \quad ; \quad (\vec{M}_O^t) = - \frac{d\vec{I}}{dt} - \vec{V}_O \times \vec{B}$$

où $\frac{d}{dt}$ est le symbole de dérivation temporelle dans les axes fixes.

Le torseur des efforts exercés par le fluide sur le multiplan est la dérivée temporelle absolue du torseur dont la résultante est $-\vec{B}$ et dont le moment en O est $-\vec{I}$.

Introduisons alors l'énergie cinétique du fluide qui, comme il est bien connu, existe et a pour valeur :

$$T = - \frac{\rho}{2} \int_C \phi \, d\psi$$

En décomposant ϕ et ψ :

$$\phi = \ell\phi_1 + m\phi_2 + \omega\phi_3 \quad ; \quad \psi = \ell\psi_1 + m\psi_2 + \omega\psi_3$$

nous sommes conduits aux intégrales :

$$\lambda_{ik} = \int_C \phi_i \, d\psi_k$$

On démontre aisément que :

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$$

Il vient donc :

$$(I.4.1) \quad 2T = \rho [\lambda_{11}\ell^2 + \lambda_{22}m^2 + \lambda_{33}\omega^2 + 2\lambda_{12}\ell m + 2\lambda_{23}m\omega + 2\lambda_{31}\omega\ell]$$

où les λ_{ik} sont des constantes ne dépendant que de la géométrie du multiplan.

Sur les contours (c_k) , nous avons :

$$\psi = \ell y - mx - \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2)$$

donc

$$x = y, \quad \psi_1 = -x, \quad \psi_2 = -\frac{x^2 + y^2}{2}$$

Par suite :

$$B_x = -\rho \int_C \phi \, dy = -\rho \int_C (\ell \phi_1 + m \phi_2 + \omega \phi_3) \, d\psi$$

c'est-à-dire :

$$B_x = \rho [\lambda_{11} \ell + \lambda_{12} m + \lambda_{13} \omega] = \frac{\partial T}{\partial \ell}$$

et de même :

$$y = \frac{\partial T}{\partial m} ; \quad \dot{I} = \frac{\partial T}{\partial \omega}$$

Nous obtenons finalement les formules : [Lamb 1] , [Kotchin 1]

$$(I.4.2) \quad X_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \ell} \right) + \omega \frac{\partial T}{\partial m}$$

$$(I.4.3) \quad Y_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial m} \right) - \omega \frac{\partial T}{\partial \ell}$$

$$(I.4.4) \quad (M_C^t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) + m \frac{\partial T}{\partial \ell} - \ell \frac{\partial T}{\partial m}$$

5°) Réduction des efforts globaux .- Axes principaux du multiplan.

Plaçons nous encore dans le cas où les circulations sont nulles.

a).- Les efforts globaux en axes fixes.

En utilisant les formules (I.4.2) et (I.4.3), nous obtenons l'affixe de la résultante en axes fixes :

$$X_1 + iY_1 = (X_0 + iY_0) e^{i\theta} = \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \ell} \right) + \omega \frac{\partial T}{\partial m} - i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial m} \right) - i\omega \frac{\partial T}{\partial \ell} \right] e^{i\theta}$$

c'est-à-dire :

$$(I.5.1) \quad X_1 + iY_1 = - \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} + i \frac{\partial T}{\partial \dot{m}} \right) e^{i\theta} \right]$$

Le moment résultant par rapport au point fixe O_1 s'écrit, si nous désignons par (x_0, y_0) les coordonnées de O dans le système fixe $O_1 x_1 y_1$:

$$\mathcal{M}_{O_1}^t = (\mathcal{M}_O^t) - R i (x_0 - i y_0) (X_1 + i Y_1)$$

si nous utilisons (I.5.1), nous obtenons :

$$\mathcal{M}_{O_1}^t = - \frac{d}{dt} R (-i) (x_0 - i y_0) \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} + i \frac{\partial T}{\partial \dot{m}} \right) e^{i\theta} + (\mathcal{M}_O^t) - R i (\ell - i m) \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} + i \frac{\partial T}{\partial \dot{m}} \right)$$

et finalement, en tenant compte de (I.4.4) :

$$(I.5.2) \quad \mathcal{M}_{O_1}^t = - \frac{d}{dt} \left[R (-i) (x_0 - i y_0) \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} + i \frac{\partial T}{\partial \dot{m}} \right) e^{i\theta} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right]$$

b).- La pseudo résultante cinétique et le pseudo moment cinétique du fluide.

Il est bien connu que les notions de résultante cinétique et de moment cinétique n'ont pas de sens dans le cas d'un fluide s'étendant à l'infini. Mais les formules précédentes mettent en évidence des quantités susceptibles de jouer des rôles analogues.

Nous dirons que :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} + i \frac{\partial T}{\partial \dot{m}}$$

est la pseudo résultante cinétique du fluide rapportée aux axes Oxy liés au multiplan et que :

$$R (-i) (x_0 - i y_0) \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} + i \frac{\partial T}{\partial \dot{m}} \right) e^{i\theta} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}}$$

est le pseudo moment cinétique du fluide par rapport à O_1 . En remarquant que le premier terme est la mesure algébrique du produit vectoriel de $\overrightarrow{O_1 O}$ par la pseudo résultante cinétique, nous dirons que

$$\frac{\partial T}{\partial \ell}$$

est le pseudo moment cinétique du fluide par rapport à O .

c).- Réduction des formes précédentes. Les principaux du multiplan.

Nous avons :

$$\frac{\partial T}{\partial \ell} + i \frac{\partial T}{\partial m} = \rho [(\lambda_{11} + i\lambda_{12}) \ell + (\lambda_{12} + i\lambda_{22}) m + (\lambda_{13} + i\lambda_{23}) \omega]$$

ce qui peut s'écrire :

$$\rho [A(\ell - im) + B(\ell + im) + i\ell\omega]$$

avec :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} [(\lambda_{11} - \lambda_{22}) + 2i \lambda_{12}] \\ B = \frac{1}{2} (\lambda_{11} + \lambda_{22}) \text{ réel} \\ \ell = \lambda_{23} - i \lambda_{13} \end{cases}$$

Posons :

$$A = r^2 e^{2i\phi}$$

et introduisons les axes Ox' , Oy' déduits de Ox , Oy par la rotation d'angle ϕ autour de O .

Si nous désignons par λ et μ les composantes sur Ox' , Oy' de la vitesse de O :

$$\lambda + i\mu = (\ell + im) e^{-i\phi}$$

et si nous posons :

$$i \ell e^{-i\phi} = \ell_1 + i \ell_2 \quad (\ell_1, \ell_2 \text{ réels})$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & [A (\lambda - i\mu) + B (\lambda + i\mu) + i C \omega] e^{-i\phi} \\ & = (B + r^2) \left[\lambda - \omega \frac{-C_1}{B+r^2} \right] + i (B - r^2) \left[\mu + \omega \frac{C_2}{B-r^2} \right] \end{aligned}$$

Introduisons alors le point S dont les coordonnées par rapport à $Ox'y'$ sont :

$$p = \frac{C_2}{B-r^2} \quad ; \quad q = - \frac{C_1}{B+r^2}$$

et les axes $Sx''y''$ déduits de $Ox'y'$ par la translation $\vec{OS}$.

Les composantes de la vitesse de S sur ces axes sont :

$$\begin{cases} \Lambda = \lambda - \omega q \\ M = \mu + \omega p \end{cases}$$

et l'affixe de la pseudo résultante cinétique en axes $Sx''y''$ s'écrit :

$$\rho [(B + r^2) \Lambda + i (B - r^2) M]$$

En utilisant les résultats précédents, nous avons :

$$\mathcal{M}_{O_1}^t = - \frac{d}{dt} [R (-i) \rho (x_0 - iy_0) [(B+r^2) \Lambda + i (B-r^2) M] e^{i(\theta+\phi)} + \frac{\partial T}{\partial \omega}]$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{O_1}^t &= - \frac{d}{dt} \{ R (-i) \rho [x_0 - iy_0 + (p-iq) e^{-i(\theta+\phi)}] [(B+r^2) \Lambda + i (B-r^2) M] e^i \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial \omega} + R i \rho (p-iq) [(B+r^2) \Lambda + i (B-r^2) M] \} \end{aligned}$$

Comme $x_0 - iy_0 + (p - iq) e^{-i(\theta + \phi)}$ est le conjugué de l'affixe de S en axes fixes, nous pouvons prendre comme pseudo moment cinétique du fluide en S :

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = R [(p - iq) [(\theta + r^2) \Lambda + i (\theta - r^2) M]]$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = R i p \ell e^{-i\phi} (\Lambda - iM)$$

donc :

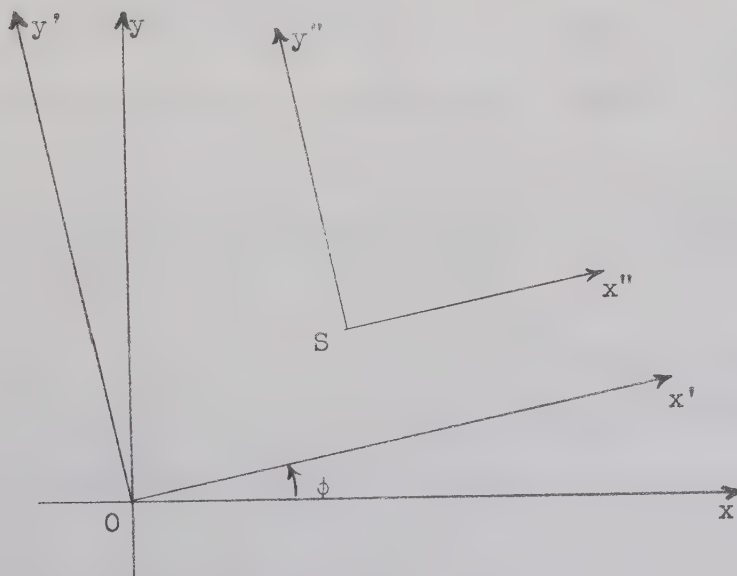
$$\rho (\lambda_{31} \ell + \lambda_{32} m + \lambda_{33} \omega) = \rho R [i \ell (\ell - im) + \ell (p - iq) e^{-i\phi} \omega]$$

Comme :

$$R i \ell (\ell - im) = \lambda_{13} \ell + \lambda_{23} m$$

le pseudo moment cinétique du fluide en S prend la forme :

$$\rho R [\lambda_{33} - \ell (p - iq) e^{-i\phi}] \omega$$



[Fig. 2]

Finalement en utilisant les axes $Sx'' y''$ que nous appellerons axes principaux du multiplan, la pseudo résultante cinétique a pour composantes sur ces axes :

$$\rho (\mathcal{B}+r^2) \Lambda \quad , \quad \rho (\mathcal{B}-r^2) M$$

tandis que le pseudo moment cinétique en S vaut :

$$\rho \mathcal{R} [\lambda_{33} - \mathcal{C} (p-iq) e^{-i\phi}] \cdot \omega$$

Un calcul facile donne, compte tenu des relations entre $\mathcal{L}$, m , Λ , M , la force vive du fluide :

$$2T = \rho \{ (\mathcal{B}+r^2) \Lambda^2 + (\mathcal{B}-r^2) M^2 + \mathcal{R} [\lambda_{33} - \mathcal{C} (p-iq) e^{-i\phi}] \omega^2 \}$$

Les coefficients de Λ^2 , M^2 , ω^2 sont donc positifs.

6°) Les équations du mouvement du multiplan.

Désignons par θ l'angle $\widehat{O_1 x_1}, Sx''$ ($\theta = \theta + \phi$), par A'_k les affixes dans $Sx'' y''$ des points d'application J_k des forces de Joukowski introduites par les circulations Γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$). L'affixe, en axes $O_1 x_1 y_1$, de la résultante des efforts aérodynamiques est :

$$- \rho \frac{d}{dt} \{ [(\mathcal{B}+r^2) \Lambda + i (\mathcal{B}-r^2) M] e^{i\theta} + \sum_{k=1}^n i \rho \Gamma_k (\Lambda + iM + i\omega A'_k) e^{i\theta} \}$$

tandis que le moment en O_1 est :

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dt} \mathcal{R} \{ -i [x_0 - iy_0 + (p-iq)e^{-i\phi}] [(\mathcal{B}+r^2)\Lambda + i(\mathcal{B}-r^2)M] e^{i\theta} + \rho [\lambda_{33} - \mathcal{C}(p-iq)e^{-i\phi}] \omega \} \\ & + \mathcal{R} \sum_{k=1}^n \rho \Gamma_k [x_0 - iy_0 + (p-iq + \overline{A'_k})e^{-i\phi}] [\Lambda + iM + i\omega A'_k] e^{i\theta} \end{aligned}$$

Supposons que le multiplan soit soumis à un système de forces dont la résultante a pour composantes (X_1, Y_1) sur les axes fixes $O_1 x_1 y_1$ et dont le moment en O_1 est $M_{O_1}^t$.

Appelons μ la masse du multiplan, G , d'affixe $\zeta = \xi + i\eta$ dans $Sx'' y''$ son centre d'inertie, I_G son moment d'inertie par rapport à G .

Le théorème du mouvement de G et le théorème du moment cinétique au point fixe O_1 donnent, en faisant passer au premier membre les contributions des efforts aérodynamiques correspondants à des circulations nulles :

$$\frac{d}{dt} \{ [\mu(\Lambda + iM + i\omega\zeta) + \rho [(\mathcal{R} + r^2) \Lambda + i(\mathcal{B} - r^2) M]] e^{i\theta} = X_1 + iY_1$$

$$+ \sum_{k=1}^n i\rho \Gamma_k (\Lambda + iM + i\omega A'_k) e^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ & \mathcal{R} [I_G + \rho (\lambda_{33} - \mathcal{C}(p - iq)e^{-i\phi})] \omega \\ & - i\mu [x_O - iy_O + (p - iq + \bar{\zeta})e^{-i\theta}] [\Lambda + iM + i\omega\zeta] e^{i\theta} \\ & - i\rho [x_O - iy_O + (p - iq)e^{-i\theta}] [(\mathcal{R} + r^2) \Lambda + i(\mathcal{B} - r^2) M] e^{i\theta} \} \end{aligned}$$

$$= M_{O_1}^t + \sum_{k=1}^n \mathcal{R} \rho \Gamma_k [x_O - iy_O + (p - iq + \bar{A}'_k)e^{-i\theta}] [\Lambda + iM + i\omega A'_k] e^{i\theta}$$

Les quantités entre accolades dans les premiers membres sont l'impulse et le moment d'impulse de la théorie de Lord Kelvin.

Ces équations du mouvement du multipaie peuvent être notablement simplifiées si l'on utilise un système d'axes particulier.

Introduisons les axes $\{X, Y\}$ parallèles à $Sx''y''$ dont l'origine Ω a pour coordonnées dans ce dernier système :

$$\xi' = \frac{\mu \xi}{B} \quad ; \quad \eta' = \frac{\mu \eta}{A}$$

avec :

$$A = \mu + \rho (B+r^2) \quad ; \quad B = \mu + \rho (B-r^2)$$

Si nous désignons par (l_1, m_1) les composantes de la vitesse de Ω , par (X, Y) celles de la résultante des forces, par $\alpha_k + i\beta_k$ l'affixe du point J_k dans le repère $\{X, Y\}$, le théorème du mouvement de G fournit les équations :

$$(I.6.1) \quad A \frac{dl_1}{dt} - B \omega m_1 = - \sum_{k=1}^n \rho \Gamma_k (m_1 + \omega \alpha_k) + X$$

$$(I.6.2) \quad B \frac{dm_1}{dt} + A \omega l_1 = \sum_{k=1}^n \rho \Gamma_k (l_1 - \omega \beta_k) + Y$$

Pour obtenir la troisième équation, nous utilisons le théorème de l'énergie cinétique. Soient $\mathcal{P}$ la puissance des forces directement appliquées et $\mathcal{M}_\Omega^t$ leur moment par rapport à Ω . Nous avons :

$$\mathcal{P} = X l_1 + Y m_1 + \mathcal{M}_\Omega^t \omega$$

La puissance des forces aérodynamiques est :

$$- \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} [(B+r^2) \Lambda^2 + (B-r^2) M^2 + R [\lambda_{33} - \mathcal{C}(p-iq) e^{-i\phi}] \omega^2] \quad ,$$

celle des forces de Joukowski étant évidemment nulle.

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \mu [(\Lambda - \omega \eta)^2 + (M + \omega \xi)^2] + I_G \omega^2 \} = - \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \{ (\mathcal{B} + r^2) \Lambda^2 + (\mathcal{B} - r^2) M^2 \\ + \mathcal{R} [\lambda_{33} - \mathcal{C} (p - iq) e^{-i\phi}] \omega^2 \} + \mathcal{P}$$

et par suite, en posant

$$C = I_G + \rho \mathcal{R} [\lambda_{33} - \mathcal{C} (p - iq) e^{-i\phi}] + \mu \rho \left[\frac{\mathcal{B} - r^2}{B} \xi^2 + \frac{\mathcal{B} + r^2}{A} \eta^2 \right] > 0 :$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [A \ell_1^2 + B m_1^2 + C \omega^2] = \mathcal{X}_{\ell_1} + \mathcal{Y}_{m_1} + \mathcal{M}_{\Omega}^t \cdot \omega$$

En utilisant les équations (I.6.1) et (I.6.2), nous obtenons :

$$(I.6.3) \quad C \frac{d\omega}{dt} + (B - A) \ell_1 m_1 = \mathcal{M}_{\Omega}^t \sum_{k=1}^n \rho \Gamma (\ell_1 \alpha_k + m_1 \beta_k)$$

Les équations (I.6.1), (I.6.2), (I.6.3) sont les équations "réduites" du mouvement du multiplan.

La détermination effective des efforts aérodynamiques exige le calcul du potentiel complexe. Ce calcul a été fait dans le cas du profil unique en utilisant la représentation conforme de l'extérieur du profil sur l'extérieur d'un cercle [Couchet 1] .

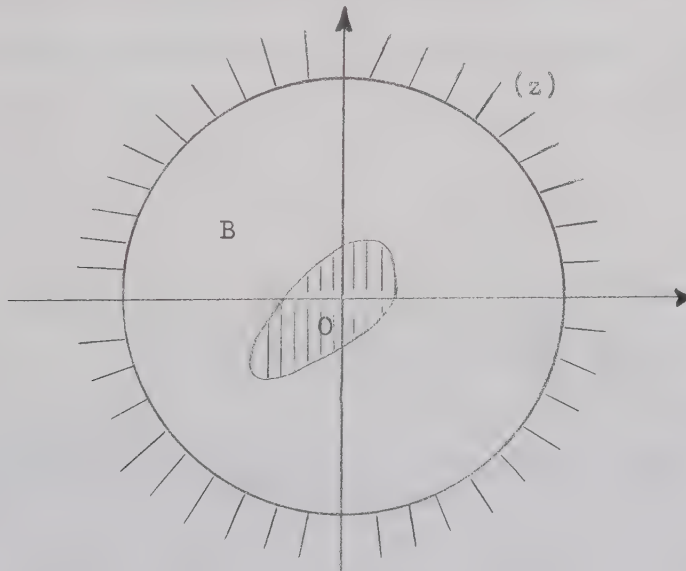
Nous allons l'effectuer dans le cas d'un couple de profils en utilisant la représentation conforme de l'extérieur du couple sur une couronne circulaire.

La représentation conforme de l'extérieur
d'un couple de profils sur une couronne circulaire.

1°) Théorème d'existence.

Nous allons indiquer les grandes lignes de la démonstration de M. Y. KOMATU. [Komatu 1]

Par une inversion complexe convenable, on transforme l'extérieur du couple de profils en un domaine annulaire ; en utilisant le théorème de Riemann, on se ramène au cas où ce domaine B est limité par 1^{er} cercle $|z| = 1$ et une courbe de Jourdan fermée analytique intérieure à ce cercle et entourant l'origine [fig 3]



[Fig. 3]

Soit $\mathcal{F}$ la famille de fonctions $F(z)$ régulières et univalentes dans B , $|z| = 1$ compris, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$0 < |F(z)| < 1 \text{ pour } z \in B ; \quad |F(z)| = 1 \text{ pour } |z| = 1$$

$\mathcal{F}$ est une famille normale et compacte.

On pose :

$$S_{n+1} = \{ F \in \mathcal{F} \mid F(z) \neq 0 \text{ pour } |z| \leq r \}$$

$$S_{n+1} \neq \emptyset \quad (*)$$

Il existe une suite $\{F_n(z)\}$ de fonctions de $\mathcal{F}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n) = q$ et on peut en extraire une suite $\{f_n(z)\}$ convergeant uniformément vers une fonction $f(z)$ de $\mathcal{F}$ dans B et sur $|z| = 1$ et $q = m(f)$. [Nehari 1].

On montre d'abord que, pour r suffisamment voisin de 1 et inférieur à 1 :

$$\min_{|z|=r} |f_n(z)| \leq r ,$$

ce qui entraîne :

$$\min_{|z|=r} |f(z)| \leq r < 1 = |f(1)|$$

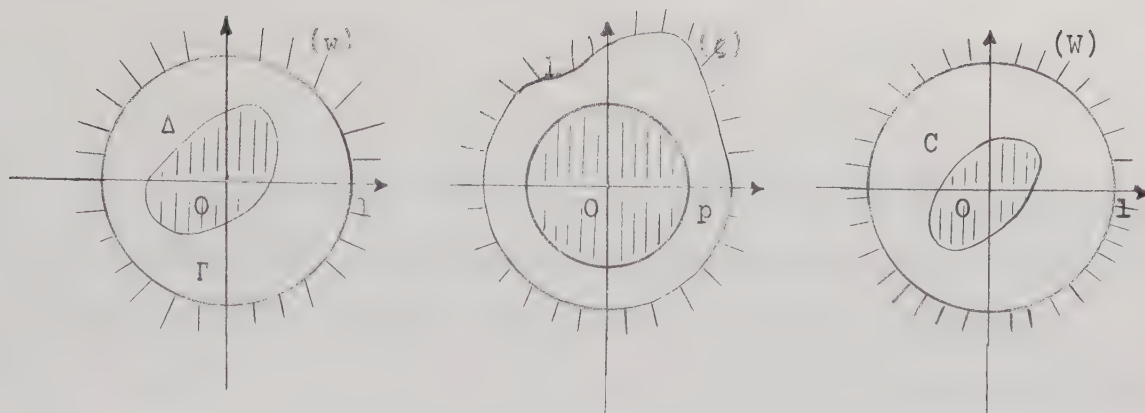
$f(z)$ n'est donc pas une constante ; elle est régulière et univalente dans B et :

$$0 < q = m(f) \leq r < 1$$

L'image Δ de B par $w = f(z)$ est donc contenue dans la couronne $q < |w| < 1$ et possède la circonférence $|w| = 1$ comme frontière extérieure.

Supposons que l'autre frontière Γ soit distincte de la circonférence

$$|w| = q$$



[fig 4]

Si l'on appelle p le maximum de $|w|$ sur Γ , $w = g(\zeta)$ la fonction effectuant la représentation conforme de l'extérieur de Γ sur $|\zeta| > p$ et telle que $g(\infty) = \infty$, L l'homologue de $|w| = 1$, P le maximum de $|\zeta|$ sur L , le lemme de Schwarz donne :

$$q < \frac{p}{P}$$

Si l'on désigne par $\zeta = G(W)$ la fonction effectuant la représentation conforme de $|W| < 1$ sur l'intérieur de L telle que $G(0) = 0$ et par Q le minimum de $|W|$ sur la courbe C homologue de $|\zeta| = p$, le même lemme de Schwarz donne :

$$\frac{p}{P} \leq Q$$

Par suite :

$$q < Q$$

Or la fonction :

$$W = f^x(z) = G^{-1} [g^{-1} [f(z)]]$$

appartenant à $\mathcal{F}$, vérifie

$$m(f^*) = Q \leq q$$

D'où contradiction.

$w = f(z)$ effectue bien la représentation conforme de B , donc de l'extérieur du couple de profils, sur la couronne circulaire $q < |w| < 1$.

2°) Unicité de la représentation conforme.

Il est bien connu que pour un domaine doublement connexe donné, le rapport des rayons de la couronne est bien déterminée ; $q^{-1} > 1$ est appelé module du domaine.

Comme les seules représentations conformes d'une couronne circulaire sur elle-même sont les rotations autour de son centre, nous avons le résultat suivant :

la transformation conforme de l'extérieur d'un couple de profils sur une couronne circulaire est bien déterminée si l'on impose à l'image d'un point du domaine d'être sur le demi-axe réel positif.

On notera que le module de l'image est parfaitement déterminé.

3°) Les diverses formes de la fonction effectuant la représentation conforme.

Nous effectuons la représentation conforme de l'extérieur du couple de profils $[c, c']$ du plan (z) sur une couronne circulaire $[C, C']$ centrée à l'origine du plan (Z) . Changeant les notations par raison de symétrie, nous appelons q et $\frac{1}{q}$ les rayons de C et C' respectivement (q bien déterminé et inférieur à 1).

Soit

$$z = H(\zeta)$$

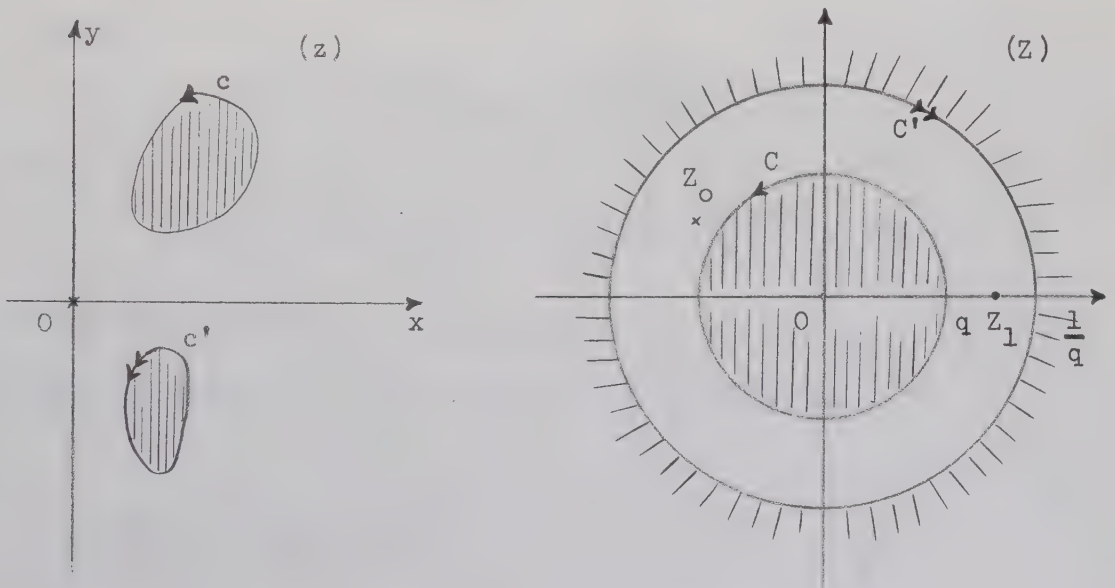
la fonction effectuant cette représentation conforme, régulière et univalente dans la couronne circulaire. Elle est parfaitement déterminée si l'on impose à l'image Z_1 du point à l'infini du plan (z) d'être située sur le demi-axe réel positif, ce que nous supposons dans toute la suite.

Nous pouvons donc écrire :

$$z = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{Z_1} \right) \quad (Z_1 \text{ réel positif}).$$

où $K(\zeta)$ est holomorphe dans la couronne circulaire, donc y est développable en série de Laurent.

Nous pouvons supposer que l'origine du plan (z) est extérieure au couple de profils (ceci est utile pour l'étude des couples symétriques) et mettre en évidence son image Z_0 .



[fig 5]

Nous avons donc

$$z = H(Z) = \frac{Z - Z_1}{Z_1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} Z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n \right]$$

où la série entre crochets est absolument et uniformément convergente pour $q + \varepsilon \leq |Z| \leq \frac{1}{q} - \varepsilon$,

Dans tout ce qui suit, nous supposons que la série est absolument et uniformément convergente pour $q \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$.

Nous aurons besoin dans la suite d'expressions remarquables de la fonction $H(Z)$ dans les couronnes $q \leq |Z| < Z_1$ et

$$Z_1 < |Z| \leq \frac{1}{q}.$$

1)- Pour $q \leq |Z| < Z_1$, nous avons :

$$\frac{1}{Z - Z_1} = -\frac{1}{Z_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Z^n}{Z_1^n}$$

$H(Z)$ prend donc la forme :

$$H(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} Z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n,$$

la série étant absolument et uniformément convergente pour

$q \leq |Z| \leq \frac{1}{q} - \varepsilon$ et les coefficients étant donnés par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{Z_1} \left[a_n Z_0 + (Z_0 - Z_1) \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{Z_1^{n-p}} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a_{-p}}{Z_1^{n+p}} \right) \right] \quad (n \geq 1) \\ a_{-n} = \frac{1}{Z_1} \left[a_{-n} Z_0 + (Z_0 - Z_1) \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a_{-(n+p)}}{Z_1^p} \right] \quad (n \geq 0) \end{array} \right.$$

2)- Pour $Z_1 < |Z| \leq \frac{1}{q}$, nous avons :

$$\frac{1}{Z - Z_1} = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Z_1^n}{Z^n}$$

et $H(Z)$ prend la forme :

$$H(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{-n} Z^{-n} + \beta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n Z^n$$

la série étant absolument et uniformément convergente pour

$Z_1 + \varepsilon \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$ et les coefficients étant donnés par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_n = a_n + \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n+p} Z_1^p \quad (n \geq 0) \\ \beta_{-n} = a_{-n} + \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1} \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_{-p} Z_1^{n-p} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p Z_1^{n+p} \right) \quad (n \geq 1) \end{array} \right.$$

Remarque .

Il existe évidemment des relations entre les α_i et les β_i .

Nous indiquerons pour l'instant qu'en calculant les différences

$\alpha_i - \beta_i$ en fonction de Z_0 , Z_1 et des a_j , nous obtenons les

formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 - \beta_0 = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p Z_1^p = \frac{K(Z_1)}{Z_1} \\ \alpha_n - \beta_n = Z_1^{-n} (\alpha_0 - \beta_0) \quad (n \geq 1) \\ \alpha_{-n} - \beta_{-n} = Z_1^n (\alpha_0 - \beta_0) \quad (n \geq 1) \end{array} \right.$$

Il est à noter que ce sont les coefficients α_i et β_i qui interviendront dans la suite, plutôt que les coefficients a_j .

4°) Aire des profils.

L'aire du profil (c) est donné par la formule :

$$A = \frac{1}{2} \int_{c'} \bar{z} \, dz$$

donc, en tenant compte de la correspondance des sens de parcours sur (c) et (C) [Voir fig. 5] :

$$A = \frac{1}{2} \int_C \overline{H(Z)} \cdot H'(Z) \, dZ$$

sur (C), où $Z \cdot \bar{Z} = q^2$, nous pouvons écrire :

$$\overline{H(Z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\alpha}_n q^{2n} Z^{-n} + \bar{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\alpha}_{-n} q^{-2n} Z^n$$

Par suite :

$$A = \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{Z} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\alpha}_n q^{2n} Z^{-n} + \bar{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\alpha}_{-n} q^{-2n} Z^n \right] \left[\sum_{n=1}^{+\infty} -n \alpha_{-n} Z^{-n} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n Z^n \right] dZ$$

ce qui donne :

$$A = \pi \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n \bar{\alpha}_n q^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_{-n} \bar{\alpha}_{-n} q^{-2n} \right]$$

De même, l'aire du profil (c') est donnée par la formule :

$$\alpha' = -\frac{1}{2} \int_{C^*} \overline{H(Z)} \cdot H'(Z) dZ$$

ce qui donne

$$\alpha' = -\pi \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \beta_n \overline{\beta}_n q^{-2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta_{-n} \overline{\beta}_{-n} q^{2n} \right]$$

5°) Centre d'inertie des profils.

L'affixe du centre d'inertie de l'aire intérieure à (c) supposée homogène est :

$$\zeta_c = \frac{1}{2i\alpha} \int_{C^*} z \overline{z} dz$$

donc

$$\zeta_c = \frac{1}{2i\alpha} \int_{C^*} H(Z) \cdot \overline{H(Z)} H'(Z) dZ$$

En utilisant l'expression de $\overline{H(Z)}$ sur (C) trouvée au paragraphe précédent, nous pouvons écrire sur (C) :

$$H(Z) \cdot \overline{H(Z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha'_n Z^{-n} + \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha'_n Z^n$$

où :

$$\alpha'_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n+p} \overline{\alpha}_p q^{2p} \quad (n \text{ entier quelconque})$$

d'où :

$$\zeta_c = \frac{\pi}{\alpha} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n \alpha'_n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_{-n} \alpha'_n \right]$$

Remarque :

Dans

$$= \sum_{p'=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n+p'} \bar{\alpha}_{p'} q^{2p'}$$

posons :

$$p' = n+p$$

Il vient :

$$= q^{2n} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n+p} \bar{\alpha}_p q^{2p}$$

D'où la relation :

$$\bar{\alpha}'_{-n} = q^{2n} \alpha'_n ; \quad \bar{\alpha}'_n = q^{-2n} \alpha'_{-n}$$

Pour calculer l'affixe ζ_c , du centre d'inertie de l'aire de (c') supposée homogène, nous remarquons que sur (C') :

$$H(Z) \cdot \overline{H(\bar{Z})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_{-n} Z^{-n} + \beta'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_n Z^n$$

où :

$$\beta'_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{n+p} \bar{\beta}_p q^{-2p} \quad (n \text{ entier quelconque})$$

Nous obtenons :

$$\zeta_{c'} = -\frac{1}{\alpha'} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \beta_n \beta'_{-n} - \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta_{-n} \beta'_n \right]$$

Remarque :

Nous avons de même :

$$\bar{\beta}'_{-n} = q^{-2n} \beta'_n ; \quad \bar{\beta}'_n = q^{2n} \beta'_{-n}$$

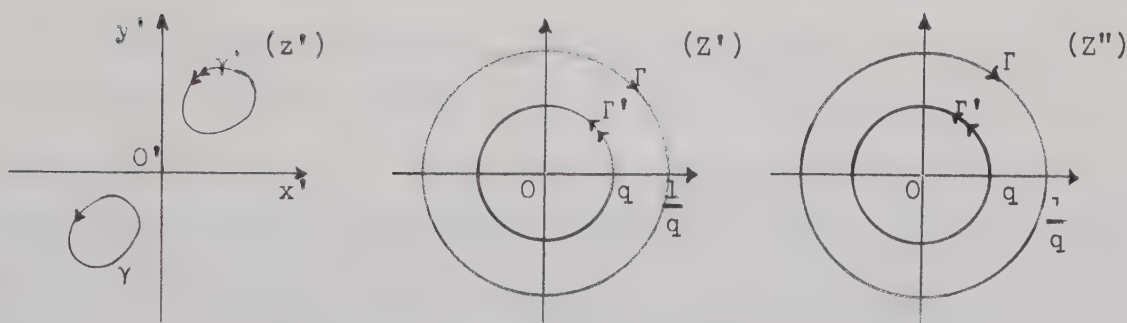
6°) cas particuliers des couples de profils symétriques.

a)- Profils symétriques par rapport à un point.

Prenons ce point comme origine O ; la symétrie de centre O transforme le couple (c, c') en un couple (γ, γ') du plan (z') $[z' = -z]$ identique au précédent, dont l'extérieur est susceptible d'être représenté conformément sur la couronne (Γ, Γ') du plan (Z') par $z' = H(Z')$ [fig. 6] .

Si nous effectuons la transformation $Z'' = \frac{1}{Z'}$, nous obtenons la couronne (Γ_1, Γ'_1) identique à la couronne (C, C') .

Puisque nous imposons à l'image du point à l'infini du plan (z) d'être sur le demi-axe réel positif, $Z'' = Z$, donc $\frac{1}{Z'} = Z$.



[fig. 6]

Par suite :

$$H(Z) = -H\left(\frac{1}{Z}\right)$$

Les images Z_1 du point à l'infini du plan (z) et Z_0 de l'origine de ce plan doivent vérifier :

$$Z_0 = 1$$

Donc

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{réel positif} \\ Z_0 = -1 \end{cases}$$

$H(Z)$ prend donc la forme :

$$H(Z) = \frac{Z+1}{Z-1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} Z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n \right]$$

En utilisant l'identité $H(Z) \equiv -H\left(\frac{1}{Z}\right)$, nous trouvons facilement :

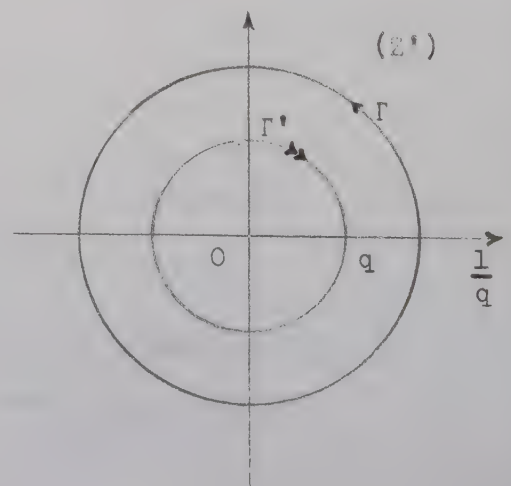
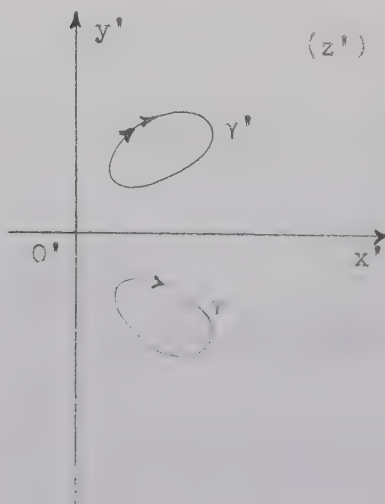
$$a_{-n} = a_n \quad (n \neq 0)$$

D'où finalement

$$z = H(Z) = \frac{Z+1}{Z-1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n \right]$$

a)- Profils symétriques par rapport à une droite.

Prenons cette droite comme axe réel Ox . La symétrie par rapport à cette droite transforme le couple (c, c') en un couple (γ, γ') du plan (z') ($z' = \bar{z}$), identique au premier, dont l'extérieur est susceptible d'être représenté conformément sur la couronne (Γ, Γ') du plan (Z') par $z' = H(Z')$ [fig 7].



Nous avons :

$$Z' = \frac{1}{Z}$$

et par suite :

$$H(Z) \equiv H\left(\frac{1}{Z}\right)$$

Nous en déduisons :

$$Z_1 \cdot \bar{Z}_1 = Z_0 \cdot \bar{Z}_0 = 1$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{réel positif} \\ Z_0 = e^{is_0} & (s_0 \neq 0) \end{cases}$$

L'identité $H(Z) \equiv H\left(\frac{1}{Z}\right)$ fournit immédiatement :

$$a_{-n} = \bar{a}_n e^{-is_0} \quad (n \text{ quelconque})$$

donc :

$$z = H(Z) = \frac{Z - e^{is_0}}{Z - 1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \bar{a}_n e^{-is_0} Z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n \right]$$

où $s_0 \neq 0$ et $a_0 e^{is_0}$ est réel.

7°) Cas des profils à pointe.

Si l'un des profils présente une pointe, la dérivée $\frac{dH}{dz}$ s'annule sur la circonférence transformée du profil en question. Nous ne pouvons pas amener par rotation l'image de la pointe sur l'axe réel, car l'image Z_1 du point à l'infini quitterait le demi-axe réel positif.

Dans le cas des profils symétriques par rapport à l'origine, si (c) a une pointe d'image $Z = q e^{i\sigma}$, (c') en a une, symétrique

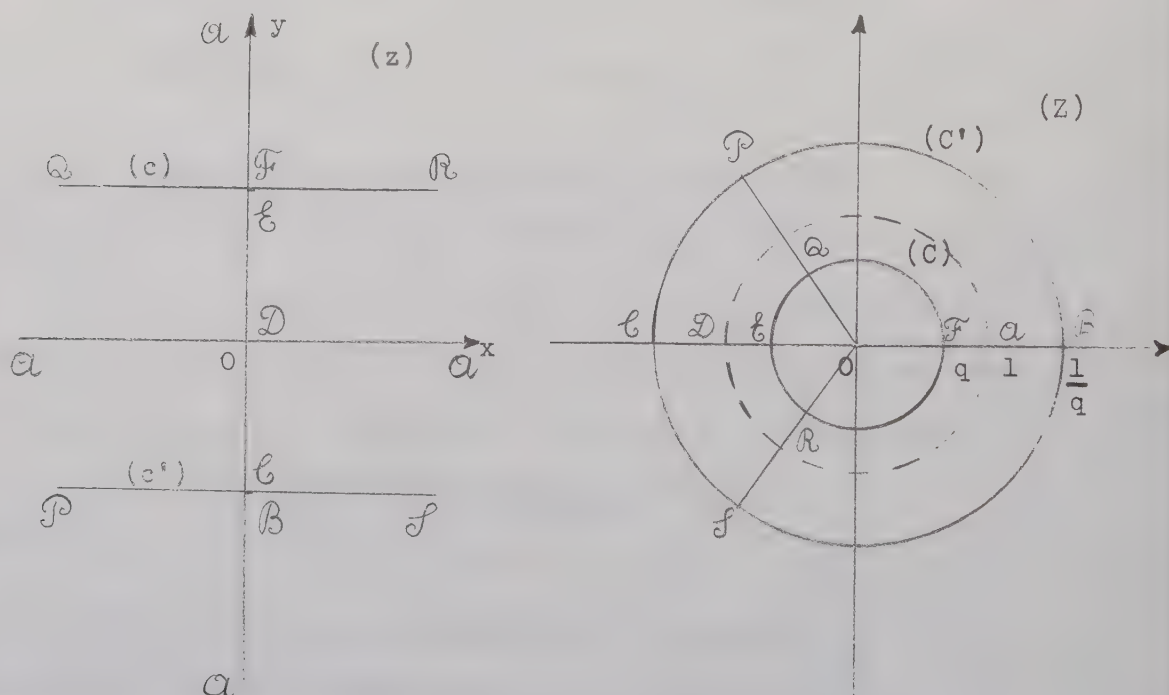
par rapport à l'origine, d'image $Z = \frac{1}{q} e^{-i\sigma}$.

Dans le cas des profils symétriques par rapport à l'axe réel, si (c) a une pointe d'image $Z = q e^{i\sigma}$, (c') en a une, d'image $Z = \frac{1}{q} e^{i\sigma}$.

Exemple : le biplan droit.

Il s'agit d'un couple de profils rectilignes, parallèles et égaux, non décalés dans le sens de leur longueur. L'extérieur de ce couple peut-être représenté conformément sur une couronne circulaire de façon assez simple [Kober 1]

Les correspondances sont indiquées sur la figure 8.



[Fig. 8]

Nous avons, en appelant h l'entreplan :

$$z = h \left[\zeta (i \log Z) - \frac{\eta_1 i}{\pi} \log Z \right]$$

avec $\omega_1 = \Pi$, $\omega_3 = -i \log q$; $\zeta(\Pi) = \eta_1$ réel.

Aux quatre extrémités $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\frac{dz}{dZ}$ s'annule.

Or :

$$\frac{dz}{dZ} = -\frac{ih}{Z} \left[p(i \log Z) + \frac{\eta_1}{\Pi} \right]$$

Si $Z = q e^{i\sigma}$ ($-\Pi < \sigma < 0$) est l'image du point $\mathcal{R}$, σ est déterminé par l'équation :

$$p(\omega_3 + \sigma) = -\frac{\eta_1}{\Pi}$$

Il est facile de déterminer la longueur 2ℓ d'un segment.

En effet :

$$z_{\mathcal{R}} = h \left[-\zeta(\omega_3 + \sigma) + \frac{\eta_1(\omega_3 + \sigma)}{\Pi} \right]$$

$$z_{\mathcal{Q}} = h \left[\zeta(-\omega_3 + \sigma) - \frac{\eta_1(-\omega_3 + \sigma)}{\Pi} \right]$$

Ce qui donne par différence :

$$2\ell = h \left[\zeta(\omega_3 - \sigma) - \zeta(\omega_3 + \sigma) + \frac{2\eta_1 \sigma}{\Pi} \right]$$

$$\left[\zeta(\omega_3 - \sigma) - \zeta(\omega_3 + \sigma) = \zeta(\omega_3 - \sigma) + \overline{\zeta(\omega_3 - \sigma)} \text{ est bien réel} \right].$$

Calculons maintenant les coefficients α_i et β_i .

Pour $q \leq |Z| < 1$, nous avons la formule : [Villat 3]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n - q^{2n} Z^{-n}}{1 - q^{2n}} = -i \left[\zeta(i \log Z) - \frac{\eta_1 i}{\Pi} \log Z \right] - \frac{1}{2}$$

de sorte que :

$$z = ih \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n - q^{2n} Z^{-n}}{1 - q^{2n}} \right]$$

et par suite

$$\alpha_0 = -\frac{ih}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{ih}{1-q^{2n}} \quad (n \geq 1)$$

$$\frac{2n}{1-q^{2n}} \quad (n \geq 1)$$

Pour $1 < |Z| \leq \frac{1}{q}$, nous avons, par changement de Z en $\frac{1}{Z}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^{-n} - q^{2n} Z^n}{1 - q^{2n}} = i \left[\log Z - \frac{1}{\pi} \log Z \right] - \frac{1}{2}$$

et par suite :

$$z = ih \left[-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n} Z^n - Z^{-n}}{1 - q^{2n}} \right]$$

ce qui donne :

$$\beta_0 = -\frac{ih}{2}$$

$$\beta_n = \frac{ih q^{2n}}{1 - q^{2n}} \quad (n \geq 1)$$

$$\beta_{-n} = \frac{-ih}{1 - q^{2n}} \quad (n \geq 1)$$

(On vérifie les relations : $\alpha_n - \beta_n = \alpha_{-n} - \beta_{-n} = \alpha_0 - \beta_0 = ih$)

Calculons maintenant les coefficients a_i .

Nous partons de la formule :

$$z = \frac{Z+1}{Z-1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} Z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n \right]$$

Pour $q \leq |Z| < 1$:

$$\frac{Z-1}{Z+1} = - \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n Z^n \right]$$

sorte que :

$$\frac{Z - \bar{Z}}{Z + 1} = -ih \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n - q^{2n} \bar{Z}^{2n}}{1 - q^{2n}} \right] \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n Z^n \right]$$

nous obtenons donc :

$$a_0 = -ih \left[\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p q^{2p}}{1 - q^{2p}} \right]$$

$$a_n = -ih \left[\frac{1}{1 - q^{2n}} + 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(-1)^p}{1 - q^{2n-2p}} + (-1)^n - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+p} q^{2p}}{1 - q^{2p}} \right]$$

(n ≥ 1)

$$a_{-n} = ih \left[\frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p q^{2n+2p}}{1 - q^{2n+2p}} \right] \quad (n \geq 1)$$

En groupant convenablement les termes de a_n , nous pouvons vérifier que $a_n = a_{-n}$.

Un calcul analogue pour $1 < |Z| \leq \frac{1}{q}$ donne les mêmes formules.

La série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n Z^n$ est évidemment absolument et uniformément

convergente pour $q \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$, puis pour n infiniment grand,

$$|a_n| = |a_{-n}| \sim h q^{2n}.$$

Remarquons enfin que les profils étant symétriques par rapport à l'origine et par rapport à l'axe réel, nous devons avoir :

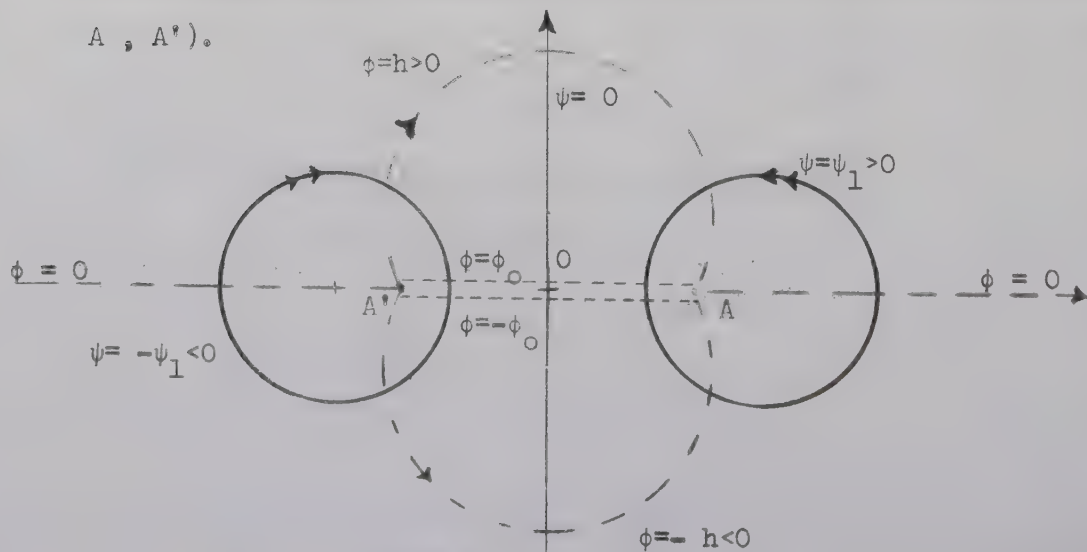
$$\left\{ \begin{array}{l} z_0 = -1 \quad (\text{donc } s_0 = \pi) \\ a_{-n} = a_n \\ a_0 \text{ imaginaire pur} \\ a_{-n} = -\overline{a_n} \end{array} \right.$$

de sorte que tous les a_i doivent être imaginaires purs. Ceci est évident sur les formules trouvées.

9°) tour sur le cas des couples de profils symétriques.

Considérons un couple de profils symétriques par rapport à l'origine. Nous allons effectuer la représentation conforme de l'extérieur de ce couple sur une couronne circulaire en utilisant une intéressante méthode due à M. VILLAT [Villat 2].

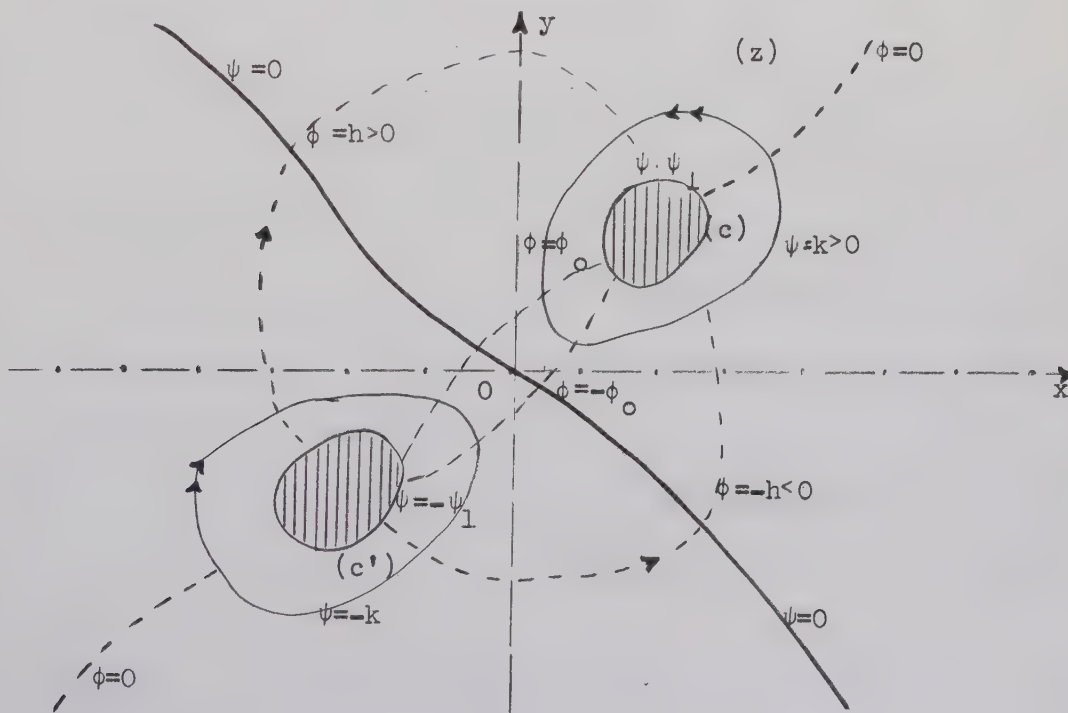
Le mouvement irrotationnel permanent d'un fluide parfait incompressible dû à deux tourbillons d'intensités opposées $2\phi_0$ et $-2\phi_0$ ($\phi_0 > 0$) placés en deux points A et A' symétriques par rapport à l'origine est bien connu. Nous avons tracé sur la figure 9 les lignes de courant (cercles du faisceau à points-limites A, A') et les lignes équipotentielles (cercles du faisceau à points de base A, A').



[Fig 9]

Nous pouvons effectuer la représentation conforme de l'extérieur d'un couple de profils (c) , (c') symétriques par rapport à l'origine du plan (z) sur l'extérieur de deux cercles égaux du faisceau à points-limites A , A' . A l'écoulement de la figure 9 correspond l'écoulement de la figure 10. Soit $f = \phi + i\psi$ le potentiel complexe de cet écoulement.

Les contours (c) et (c') sont les lignes $\psi = \psi_1 > 0$ et $\psi = -\psi_1 < 0$; les circulations autour de (c) et (c') sont respectivement $2\phi_0$ et $-2\phi_0$; à un point du plan (z) correspondent une valeur de ϕ et une valeur de ψ et inversement; en deux points symétriques par rapport à l'origine, les ϕ et ψ sont opposés; à l'origine et au point à l'infini correspondent respectivement $(\phi = \pm \phi_0, \psi = 0)$ et $(\phi = \psi = 0)$.

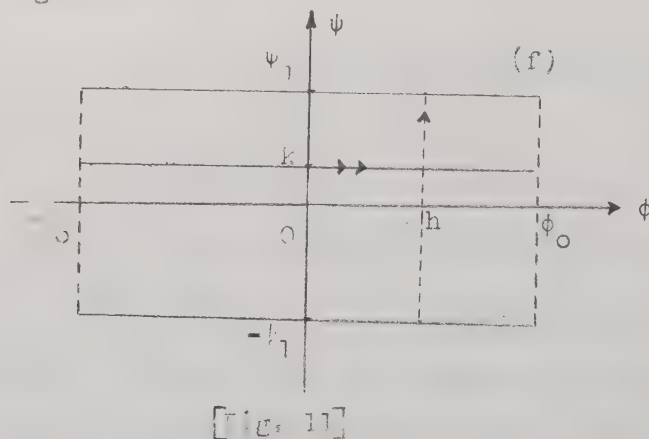


[Fig. 10]

Dans le plan auxiliaire $f = \phi + i\psi$, le domaine est représenté conformément une fois sur le rectangle

$$-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0, \quad -\psi_1 \leq \psi \leq \psi_1$$

de la figure 11.



Posons :

$$f = -\frac{i\phi_0}{\pi} \log Z$$

Si $Z = \rho e^{is}$ ($-\pi \leq s \leq \pi$), nous avons :

$$\phi = -\frac{\phi_0}{\pi} s; \quad \psi = -\frac{\phi_0}{\pi} \log \rho$$

Les inégalités :

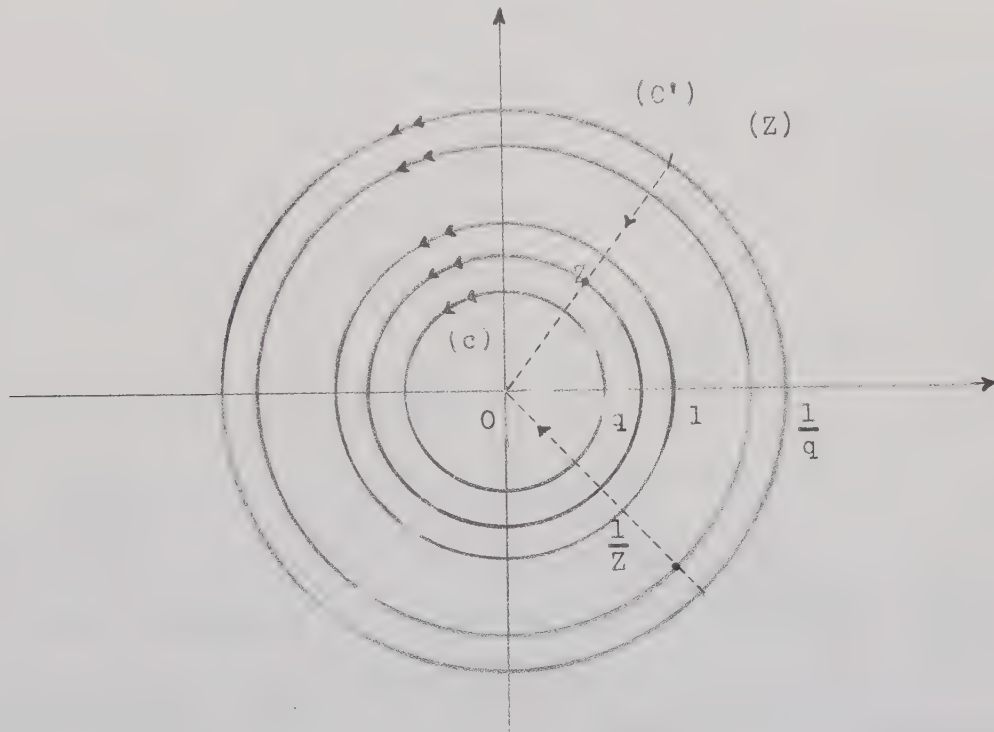
$$-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0; \quad -\psi_1 \leq \psi \leq \psi_1$$

équivalent à :

$$-\pi \leq s \leq \pi; \quad q \leq \rho \leq \frac{1}{q} \quad (q = e^{-\pi \frac{\psi_1}{\phi_0}} < 1)$$

L'extérieur du couple (c) , (c') est donc représenté conformément sur la couronne circulaire $q \leq \rho \leq \frac{1}{q}$ du plan (Z) .

Aux lignes $\phi = \text{constante}$ et $\psi = \text{constante}$ correspondent respectivement les rayons $s = c^{te}$ et les cercles $\rho = c^{te}$. A la ligne $\psi = 0$ correspond le cercle $\rho = 1$; à deux points symétriques par rapport à l'origine correspondent deux points d'affixes inverses dans la couronne [fig. 12] .



[Fig. 12]

Calculons z en fonction de Z .

Occupons-nous d'abord de la partie du plan (z) située à droite de la ligne $\psi = 0$, qui correspond à la couronne de rayons extrêmes q et 1 .

Posons :

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\Omega} \quad ; \quad \Omega = \theta + iT$$

1. A

et par suite, $e^{i\theta}$ et θ sont le module et l'argument du vecteur vitesse dans le mouvement du fluide de la figure 10. Considérée comme fonction de Z , Ω n'est pas uniforme dans la couronne : quand le point Z fait un tour complet dans la couronne, $\theta = 2\pi$ augmente de 2π . Donc la fonction

$$\Omega_1(Z) = \Omega(Z) + i \log Z$$

est uniforme et régulière dans la couronne (donc γ est développable en série de Laurent).

... pouvons donner une expression de $\Omega_1(Z)$ en utilisant une formule de M. VILLAT.

En effet, la partie réelle de $\Omega_1(Z)$ prend, le long des cercles $|Z| = 1$ et $|Z| = q$, les valeurs $\phi_1(s) - s$ et $\psi_1(s) - s$ en appelant $\phi_1(s)$ et $\psi_1(s)$ les angles que font avec l'axe réel du plan (z) les tangentes aux courbes $\psi = 0$ et $\psi = \psi_1$.

D'où

$$\Omega_1(Z) = \frac{i \omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} [\phi_1(s) - s] \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds$$

$$- \frac{i \omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} [\psi_1(s) - s] \zeta_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) ds$$

avec les notations habituelles de la théorie des fonctions elliptiques

$$\text{et } q = e^{\frac{i\omega_3}{i\omega_1}}.$$

La relation $\frac{df}{dz} = e^{-i\Omega}$ donne :

$$dz = -\frac{i\phi_0}{\Pi} e^{i\Omega_1} dZ$$

donc, par intégration, z en fonction de Z , soit $z = H_1(Z)$.

La condition de "fermeture" de M. VILLAT [Villat 2] :

$$\int_{\text{contour intérieur à la couronne}} e^{i\Omega_1} dZ = 0$$

montre que $H_1(Z)$ est uniforme.

En utilisant une remarque antérieure, nous voyons que la partie du plan (z) située à gauche de la ligne $\psi = 0$ et extérieure au contour (c') est représentée conformément sur la couronne de rayons 1 et $\frac{1}{q}$ par :

$$z = -H_1\left(\frac{Z}{q}\right)$$

Désignons par $z = H(Z)$ la fonction effectuant la représentation conforme à l'extérieur du couple de profils sur la couronne $q \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$.

$H(Z)$ a un zéro simple, correspondant à $\phi = \pm \phi_0$, $\psi = 0$, donc à $s = \pm \Pi$, $\rho = 1$, c'est-à-dire $Z = -1$; elle a également un pôle simple, correspondant à $\phi = \psi = 0$,

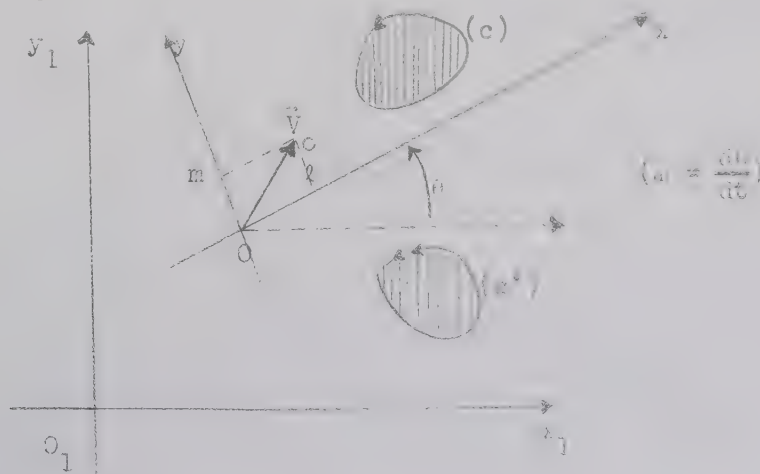
CHAPITRE III

Le potentiel complexe.

Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il est possible de déterminer le potentiel complexe du mouvement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible, au repos à l'infini, troublé par la présence d'un couple de profils animé d'un mouvement quelconque, en utilisant la représentation conforme de l'extérieur de ce couple sur une couronne circulaire. Dans le cas où les profils présentent chacun une pointe, nous en déduirons l'existence de mouvements à circulations constantes que nous précisons du point de vue cinématique.

1°) Conditions auxquelles doit satisfaire le potentiel complexe.

Reprenons pour le couple de profils $[(c), (c')]$ le problème énoncé au début du chapitre I. Les notations sont indiquées sur la [figure 13].



le potentiel complexe cherché $f(z, t)$, analytique en z
 $[z = x + iy]$, est caractérisé, à chaque instant, par les condi-
 tions suivantes :

1).- Il est défini à l'extérieur de (c) et (c') .

2).- Sa dérivée $\frac{dw}{dz}$ est régulière dans le même domaine, y compris
 le point à l'infini où elle s'annule.

3).- Sa partie imaginaire vaut sur les contours :

$$\Im f = -mx + ly - \frac{a}{2}(x^2 + y^2)$$

Nous résoudrons le problème en passant dans le plan de la couronne
 circulaire $[C], [C']]$ transformée de l'extérieur du couple de
 profils par la représentation conforme étudiée au chapitre II.

Détermination d'une fonction holomorphe dans une couronne circulaire dont la partie imaginaire est connue sur les deux circonférences frontières.

Rappelons d'abord la détermination de la fonction $G(Z)$
 holomorphe dans la couronne dont la partie imaginaire est connue
 sur (C) [$\phi(s)$ pour $Z = q e^{is}$] et sur (C') [$\psi(s)$ pour
 $Z = \frac{1}{q} e^{is}$].

Avec M. H. VILLAT [Villat 1], nous cherchons $G(Z)$
 sous la forme d'une série de Laurent :

$$G(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n Z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n Z^{-n}$$

supposée absolument et uniformément convergente pour $q \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$.

Poseons :

$$A_n = \alpha_n + i\beta_n \quad ; \quad B_n = \gamma_n + i\delta_n \quad (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n \text{ réels})$$

$$\text{Sur } (C) \text{ on a } z = q e^{i\theta} :$$

$$G(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n + i\beta_n) q^n (\cos ns + i \sin ns) + (\gamma_n + i\delta_n) q^{-n} (\cos ns - i \sin ns)$$

et par suite

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\beta_n q^n + \delta_n q^{-n}) \cos ns + (\alpha_n q^n - \gamma_n q^{-n}) \sin ns$$

En admettant que $\Phi(s)$ soit développable en série trigonométrique, nous avons :

$$\beta_n q^n + \delta_n q^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \cos ns \, ds$$

$$\alpha_n q^n - \gamma_n q^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) \sin ns \, ds$$

donc

$$A_n q^n - \overline{B}_n q^{-n} = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) e^{-in is} \, ds$$

En admettant que $\Psi(s)$ soit développable en série trigonométrique, nous obtenons :

$$A_n q^{-n} - \overline{B}_n q^n = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(s) e^{-n is} \, ds$$

Les deux équations obtenues, linéaires en A_n et $\overline{B}_n$, permettent le calcul de A_n et $\overline{B}_n$ en fonction des intégrales :

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s) e^{-in is} \, ds \quad ; \quad J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(s) e^{-n is} \, ds$$

Nous obtenons aisément

$$\begin{cases} A_n = \frac{i}{\pi (q^{2n} - q^{-2n})} [q^n \bar{I}_n - q^{-n} \bar{J}_n] \\ B_n = - \frac{i}{\pi (q^{2n} - q^{-2n})} [q^{-n} I_n - q^n J_n] \end{cases}$$

3°) Le potentiel sans circulations autour des profils.

Nous calculerons ce potentiel $\phi(Z)$ en remarquant que sa partie imaginaire doit valoir sur (C) et (C') :

$$-mx + ly - \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2)$$

c'est-à-dire :

$$- \frac{m + il}{2} z + \frac{-m + il}{2} \bar{z} - \frac{\omega}{2} z \bar{z}$$

où :

$$- \frac{m + il}{2} H(Z) + \frac{-m + il}{2} \overline{H(Z)} - \frac{\omega}{2} H(Z) \cdot \overline{H(Z)}$$

En remarquant que sur (C) , $z = \frac{q^2}{\bar{z}}$ et $ds = \frac{dz}{i\bar{z}}$,

nous avons :

$$i q^n I_n = \int_C z^{n-1} \left[- \frac{m + il}{2} H(Z) + \frac{-m + il}{2} \overline{H\left(\frac{q^2}{\bar{z}}\right)} - \frac{\omega}{2} H(Z) \cdot \overline{H\left(\frac{q^2}{\bar{z}}\right)} \right] dz$$

Utilisons les développements en série du chapitre II et observons que les hypothèses faites sur eux permettent l'intégration terme à terme. Comme les coefficients de z^{-n} dans les développements de

$H(Z)$, $H\left(\frac{q}{Z}\right)$, $H(Z) \cdot H\left(\frac{q}{Z}\right)$ sont respectivement

α_{-n} , $\bar{\alpha}_n q^{2n}$, α'_n , nous obtenons :

$$I_n = \frac{H}{q} \left[-(m+il) \alpha_{-n} + (-m+il) \bar{\alpha}_n q^{2n} - \omega \alpha'_n \right]$$

En remarquant que sur (C') , $Z = \frac{1}{q^2 \bar{Z}}$ et $ds = \frac{dZ}{iZ}$,

nous avons :

$$\begin{aligned} i q^{-n} J_n &= \int_{C'} Z^{n-1} \left[-\frac{m+il}{2} H(Z) + \frac{-m+il}{2} H\left(\frac{1}{q^2 \bar{Z}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{2} H(Z) H\left(\frac{1}{q^2 \bar{Z}}\right) \right] dZ \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$J_n = \pi q^n \left[-(m+il) \beta_{-n} + (-m+il) \bar{\beta}_n q^{-2n} - \omega \beta'_n \right]$$

Nous en déduirons les expressions de A_n et B_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{q^{2n} - q^{-2n}} \left[-(l+im) (\bar{\alpha}_{-n} - \bar{\beta}_{-n}) + (l-im) (\alpha_n q^{2n} - \beta_n q^{-2n}) \right. \\ &\quad \left. - i\omega (\bar{\alpha}'_{-n} - \bar{\beta}'_{-n}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{q^{2n} - q^{-2n}} \left[(l+im) (\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n) - (l-im) (\alpha_{-n} q^{2n} - \beta_{-n} q^{-2n}) \right. \\ &\quad \left. + i\omega (\alpha'_{-n} q^{-2n} - \beta'_{-n} q^{2n}) \right] \end{aligned}$$

Par suite, $G(Z)$ prend la forme :

$$G(Z) = l G_1(Z) + m G_2(Z) + \omega G_3(Z)$$

avec :

(III.3.1)

$$\begin{aligned}
 G_1(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n q^{2n} - \beta_n q^{-2n} - \bar{\alpha}_{-n} + \bar{\beta}_{-n}}{q^{2n} - q^{-2n}} Z^n \\
 &\quad + \frac{\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n - \alpha_{-n} q^{-2n} + \beta_{-n} q^{2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} Z^{-n} \\
 G_2(Z) &= i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\alpha_n q^{2n} + \beta_n q^{-2n} - \bar{\alpha}_{-n} + \bar{\beta}_{-n}}{q^{2n} - q^{-2n}} Z^n \\
 &\quad + \frac{\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n + \alpha_{-n} q^{-2n} - \beta_{-n} q^{2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} Z^{-n} \\
 G_3(Z) &= i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\bar{\alpha}'_{-n} + \bar{\beta}'_{-n}}{q^{2n} - q^{-2n}} Z^n + \frac{\alpha'_{-n} q^{-2n} - \beta'_{-n} q^{2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} Z^{-n}
 \end{aligned}$$

Reste à vérifier que $G(Z)$ satisfait aux conditions imposées.

Tout d'abord :

$$\Phi(s) = \left[-\frac{m+il}{2} H(Z) + \frac{-m+il}{2} \overline{H\left(\frac{q^2}{Z}\right)} - \frac{\omega}{2} H(Z) \cdot \overline{H\left(\frac{q^2}{Z}\right)} \right]_{Z=q} e^{is}$$

est développable en série trigonométrique ; en effet,

$$H(q e^{is}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n q^n e^{n is} \text{ est absolument et uniformément convergente.}$$

Il en est de même pour $\Psi(s)$.

$$\text{Ensuite, la série } \sum_{n=1}^{+\infty} A_n Z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n Z^{-n} \text{ est absolument}$$

et uniformément convergente pour $q \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$.

En effet, en observant que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| q^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{-n}| q^{-n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| q^{-n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{-n}| q^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| q^n$ convergent nous

montrons, grâce à des majorations évidentes, que $\sum_{n=1}^{\infty} A_n Z^n$ est absolument et uniformément convergente pour $|Z| \leq \frac{1}{q}$ tandis que

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n Z^{-n}$ l'est pour $|Z| \geq q$.

Enfin, $\frac{dG}{dz} = \frac{\frac{dG}{dZ}}{H'(Z)}$ tend vers zéro quand $Z \rightarrow Z_1$, c'est-à-dire quand $z \rightarrow \infty$.

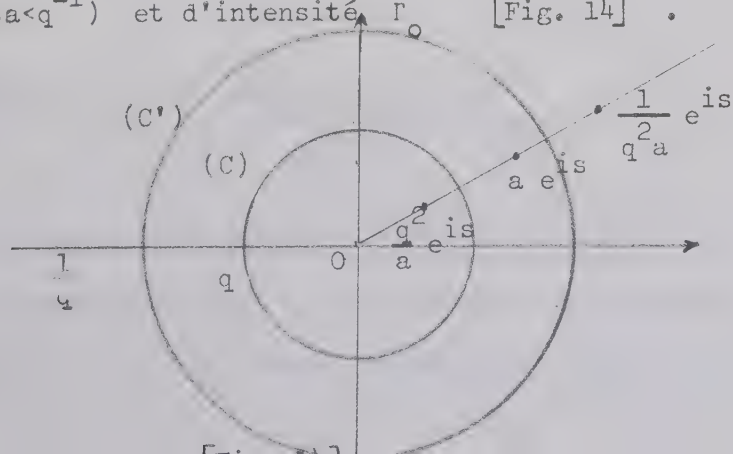
Nous savons enfin que l'unicité de $G(Z)$ est assurée, à une constante additive près sans importance ici.

4°) La théorie des images hydrodynamiques par rapport à une couronne circulaire.

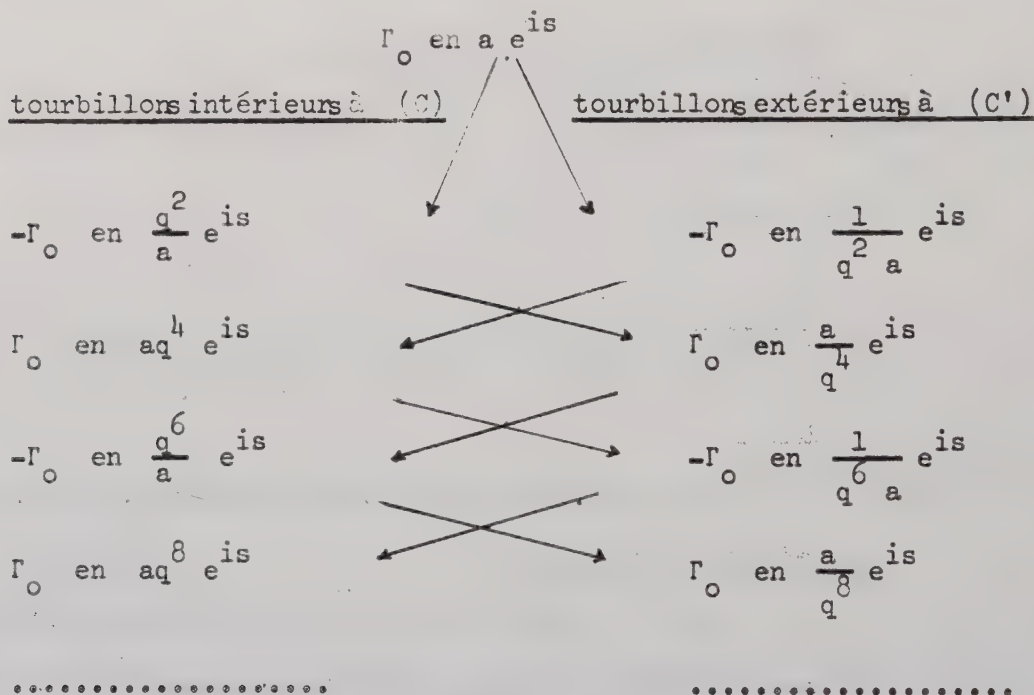
Afin de pouvoir calculer le potentiel complexe dans le cas où il y a des circulations non nulles autour des profils, nous allons faire une théorie des images par rapport à une couronne circulaire.

Image d'un tourbillon

Considérons dans la couronne $[(C), (C')]$ le tourbillon d'affixe $a e^{is}$ ($q < a < q^{-1}$) et d'intensité Γ_0 [Fig. 14].



Si nous lui adjoignons le tourbillon d'affixe $\frac{q^2}{a} e^{is}$ et d'intensité $-\Gamma_0$, nous obtenons le potentiel respectant (C), mais non (C'); nous prendrons donc les images des deux tourbillons par rapport à (C') et ainsi de suite indéfiniment. D'où le schéma suivant :



Le potentiel complexe s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i \Gamma_0}{2\pi} \log (Z - a e^{is}) - \frac{i \Gamma_0}{2\pi} \log \frac{(1 - \frac{aq^4}{Z} e^{is}) \cdot (1 - \frac{aq^8}{Z} e^{is}) \dots}{(1 - \frac{q^2}{aZ} e^{is}) \cdot (1 - \frac{q^6}{aZ} e^{is}) \dots} \\
 & -\frac{i \Gamma_0}{2\pi} \log \frac{(1 - \frac{q^4}{a} Z e^{-is}) (1 - \frac{q^8}{a} Z e^{-is}) \dots}{(1 - aq^2 Z e^{-is}) (1 - aq^6 Z e^{-is}) \dots}
 \end{aligned}$$

Les produits infinis convergent absolument dans la couronne. Les tourbillons intérieurs à (C) et extérieurs à (C') n'introduisent aucune circulation autour de (C) et (C') tandis que le

tourbillon donné introduit la circulation Γ_0 autour de (C') et une circulation nulle autour de (C) .

Première expression du potentiel complexe.

Nous transformons les logarithmes en utilisant la formule :

$$\log (1 - \zeta e^{is}) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n e^{n is}}{n} \quad (0 < |\zeta| < 1)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\log \left(1 - \frac{aq^4}{Z} e^{is}\right) \left(1 - \frac{aq^8}{Z} e^{is}\right) \dots = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{4n}}{1 - q^{4n}} \cdot \frac{a^n e^{n is}}{n Z^n}$$

$$\log \left(1 - \frac{q^2}{aZ} e^{is}\right) \left(1 - \frac{q^6}{aZ} e^{is}\right) \dots = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} \cdot \frac{e^{n is}}{n Z^n}$$

$$\log \left(1 - \frac{q^4 Z}{a} e^{-is}\right) \left(1 - \frac{q^8 Z}{a} e^{-is}\right) \dots = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{4n}}{1 - q^{4n}} \cdot \frac{Z^n e^{-n is}}{n a^n}$$

$$\log (1 - aq^2 Z e^{-is}) (1 - aq^6 Z e^{-is}) \dots = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} \cdot \frac{a^n Z^n e^{-n is}}{n}$$

d'où le potentiel complexe :

$$\begin{aligned} \text{(III.4.1)} \quad & - \frac{i \Gamma_0}{2} \left| \log (Z - a e^{is}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} \frac{e^{n is}}{n} (a^{-n} - a^n q^{2n}) Z^{-n} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} \frac{-n is}{n} (a^n - a^{-n} q^{2n}) Z^n \right| \end{aligned}$$

Seconde expression du potentiel complexe.

Ecrivons sous la forme :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i \Gamma_0}{2\pi} \log (Z - a e^{is}) \\
 &= \frac{i \Gamma_0}{2\pi} \log \left[\left(1 - \frac{aq^4}{Z} e^{is}\right) \left(1 - \frac{q^4 Z}{a} e^{-is}\right) \right] \left[\left(1 - \frac{aq^8}{Z} e^{is}\right) \left(1 - \frac{q^8 Z}{a} e^{-is}\right) \right] \\
 &+ \frac{i \Gamma_0}{2\pi} \log \left[\left(1 - \frac{q^2}{aZ} e^{is}\right) \left(1 - aq^2 Z e^{-is}\right) \right] \left[\left(1 - \frac{q^6}{aZ} e^{is}\right) \left(1 - aq^6 Z e^{-is}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Le second terme est :

$$= \frac{i \Gamma_0}{2\pi} \log \prod_{p=1}^{\infty} \left[1 - q^{4p} \left(\frac{Z}{a} e^{-is} + \frac{1}{\frac{Z}{a} e^{-is}} \right) + q^{8p} \right]$$

Nous le transformons grâce à la formule : [Tannery 1] , [Villat 1]

$$\sigma(2\omega_1 v) = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{\sin \pi v}{\prod_{l=1}^{\infty} (1 - q'^{2p})^2} e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \prod_{l=1}^{\infty} [1 - 2q'^{2p} \cos 2\pi v + q'^{4p}]$$

$$\text{où } q' = e^{-\frac{\pi \omega_3}{i \omega_1}} \quad (\omega_1, \frac{\omega_3}{i} \text{ réels positifs}).$$

Posons :

$$q' = q^2$$

Identifions :

$$\frac{Z}{a} e^{-is} + \frac{1}{\frac{Z}{a} e^{-is}} \quad \text{avec} \quad 2 \cos 2\pi v = e^{2\pi i v} + \frac{1}{e^{2\pi i v}}$$

Il vient :

$$2\pi i v = \log \left(\frac{Z}{a} e^{-is} \right)$$

donc :
$$\sigma = \frac{\log \frac{Z}{a}}{2\pi i} - \frac{s}{2\pi}$$

En utilisant la notation classique $\prod (1 - q^{2p}) = q_0$, nous obtenons pour le second terme

$$\begin{aligned} -\frac{i \Gamma_0}{2\pi} \left[\log q_0^2 + \log \frac{\pi}{2\omega_1} - \log \sin \left(\frac{\log \frac{Z}{a}}{2i} - \frac{s}{2} \right) - 2\eta_1 \omega_1 \left(\frac{\log \frac{Z}{a}}{2\pi i} - \frac{s}{2\pi} \right)^2 \right. \\ \left. + \log \sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{Z}{a} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right] \end{aligned}$$

Le troisième terme est

$$\frac{i \Gamma_0}{2\pi} \log \prod_{p=1}^{\infty} \left[1 - q^{2(2p-1)} \left(aZe^{-is} + \frac{1}{s^* e^{-is}} \right) + q^{4(2p-1)} \right]$$

Utilisons la formule : [Tannery 1], [Villat 1]

$$\sigma_3(2\omega_1 v) = \frac{e^{2\eta_1 \omega_1 v^2}}{\prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{2p-1})} - \prod_{l=1}^{\infty} [1 - 2q^{2p-1} \cos 2\pi v + q^{4p-2}]$$

Un calcul analogue au précédent donne, en posant selon l'usage :

$$\prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{2p-1}) = q_3,$$

$$\frac{i \Gamma_0}{2\pi} \left[\log q_3^2 - 2\eta_1 \omega_1 \left(\frac{\log (aZ)}{2\pi i} - \frac{s}{2\pi} \right)^2 + \log \sigma_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log (aZ) - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right]$$

Finalement, en négligeant les constantes, nous obtenons pour potentiel complexe :

$$\begin{aligned}
 (\text{III.4.2}) \quad & - \frac{i \Gamma_0}{2\pi} \left[\log (Z - a e^{is}) - \log \sin \left(\frac{\log \frac{Z}{a}}{2i} - \frac{s}{2} \right) + \frac{4\eta_1 \omega_1 \log a}{\pi i} \left(\frac{\log Z}{2\pi i} - \frac{s}{2\pi} \right) \right. \\
 & \left. + \log \frac{\sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{Z}{a} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right)}{\sigma_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log (aZ) - \frac{\omega_1}{\pi} s \right)} \right]
 \end{aligned}$$

Remarque :

Pour $a = 1$, les formules se simplifient notablement.

La première expression du potentiel complexe devient :

$$- \frac{i \Gamma_0}{2\pi} \left\{ \log (Z - e^{is}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \frac{1}{n} [Z^{-n} e^{n is} + Z^n e^{-n is}] \right\}$$

et si nous utilisons les formules :

$$\sin \left(\frac{\log Z}{2i} - \frac{s}{2} \right) = \frac{1}{2i} \left[(Z e^{-is})^{\frac{1}{2}} - (Z e^{-is})^{-\frac{1}{2}} \right]$$

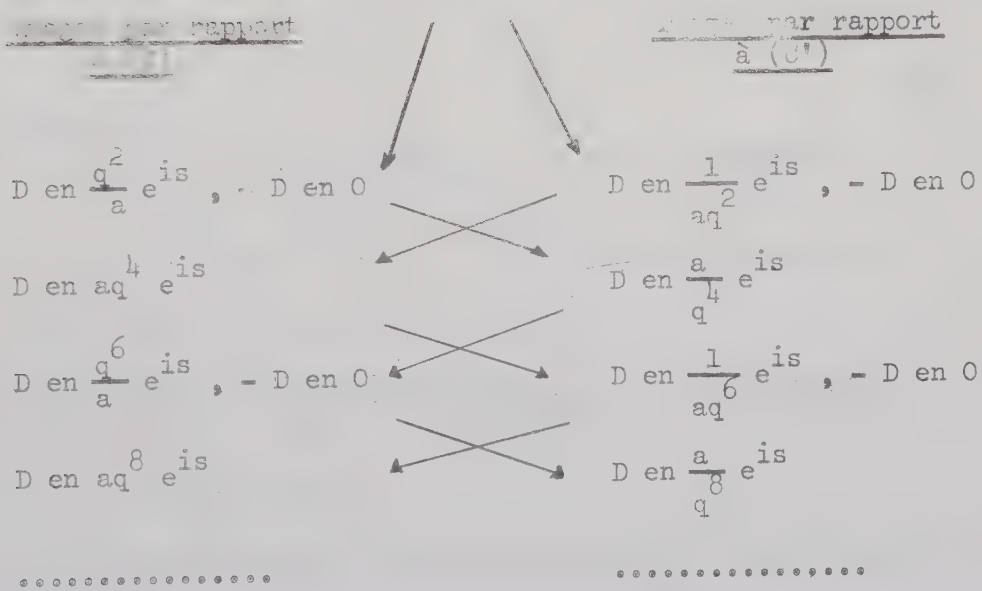
$$\frac{Z - e^{is}}{(Z e^{-is})^{\frac{1}{2}} - (Z e^{-is})^{-\frac{1}{2}}} = e^{is} (Z e^{-is})^{\frac{1}{2}},$$

la seconde expression devient, à une constante additive près :

$$- \frac{i \Gamma_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \log Z + \log \frac{\sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right)}{\sigma_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right)} \right]$$

Considérons maintenant une source d'intensité D placée au point d'affixe $a e^{is}$ ($q < a < q^{-1}$).

Nous avons maintenant le schéma suivant



D'où le potentiel complexe :

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{2\pi} & \left[\log (Z - a e^{is}) + \log \left(1 - \frac{q^2}{aZ} e^{is} \right) \left(1 - \frac{q^6}{aZ} e^{is} \right) \dots \right. \\
 & + \log \left(1 - \frac{aq^4}{Z} e^{is} \right) \left(1 - \frac{aq^8}{Z} e^{is} \right) \dots + \log (1 - aq^2 Z e^{-is}) (1 - aq^6 Z e^{-is}) \dots \\
 & \left. + \log \left(1 - \frac{q^4}{a} Z e^{-is} \right) \left(1 - \frac{q^8}{a} Z e^{-is} \right) \dots \right]
 \end{aligned}$$

Des calculs analogues à ceux qui ont été faits pour le tourbillon donnent pour ce potentiel complexe les deux expressions suivantes :

$$(III.4.3) \quad \frac{D}{2\pi} [\log (Z-a e^{is}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} \frac{e^{n is}}{n} (a^{-n} + a^n q^{2n}) Z^{-n} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} \frac{e^{-n is}}{n} (a^n + a^{-n} q^{2n}) Z^n]$$

$$(III.4.4) \quad \frac{D}{2\pi} \{ \log (Z-a e^{is}) - \log \sin \left(\frac{\log \frac{Z}{a}}{2i} - \frac{s}{2} \right) - 2\eta_1 \omega_1 \left[\left(\frac{\log \frac{Z}{a}}{2\pi i} - \frac{s}{2\pi} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\log (aZ)}{2\pi i} - \frac{s}{2\pi} \right)^2 \right] + \log \left[\sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \frac{Z}{a} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \cdot \sigma_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log (aZ) - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right] \}$$

En particulier, pour $a = 1$, nous obtenons :

$$\frac{D}{2\pi} \{ \log (Z-e^{is}) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} \frac{1}{n} [Z^{-n} e^{n is} + Z^n e^{-n is}] \}$$

$$\frac{D}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \log Z - \frac{\eta_1 \omega_1}{2} \left(\frac{\log Z}{i} - s \right)^2 + \log \left[\sigma \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \cdot \sigma_3 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right] \right\}$$

5°) Le potentiel complexe avec circulations données autour des profils.

Les résultats du paragraphe précédent permettent de calculer le potentiel complexe avec circulations données Γ et Γ' autour des profils (c) et (c') respectivement.

Nous le cherchons sous la forme :

$$f(z) = f[H(Z)] = G(Z) - \frac{i\gamma}{2\pi} \log Z$$

$$- \frac{i\Gamma_0}{2\pi} [\log(Z - a e^{is}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} \cdot \frac{e^{n is}}{n} (a^{-n} - a^n q^{2n}) Z^{-n}]$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} \cdot \frac{e^{n is}}{n} (a^n - a^{-n} q^{2n}) Z^n]$$

Le potentiel respecte les contours (c) et (c').

Nous avons :

$$\frac{df}{dz} = \frac{-\frac{i\Gamma_0}{2\pi} \frac{1}{Z - a e^{is}} + \text{série de Laurent}}{H'(Z)}$$

$\frac{df}{dz}$ devient infini pour $Z = a e^{is}$, sauf si $a e^{is} = Z_1$,

puisque $H'(Z) = \frac{d}{dz} \left[\frac{K(Z)}{Z - Z_1} \right]$ devient infini quand $Z \rightarrow Z_1$ (comme $(Z - Z_1)^{-2}$ d'ailleurs).

Nous prenons donc :

$$a e^{is} = Z_1$$

donc :

$$a = Z_1, \quad s = 0$$

et $\frac{df}{dz}$ est bien nul pour $Z = Z_1$, donc pour $z \infty$.

Nous obtenons immédiatement γ et Γ_0 par les formules :

$$\begin{cases} \Gamma = \gamma \\ \Gamma' = -\gamma - \Gamma_0 \end{cases}$$

qui donnent

$$\begin{cases} \gamma = \Gamma \\ \Gamma_0 = -(\Gamma + \Gamma') \end{cases}$$

Le potentiel cherché, dont l'unicité est assurée à une constante additive près, peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{(III.5.1)} \quad f(z) = f[H(z)] &= G(z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} [\log(z - z_1) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q} \frac{1}{n} (z_1^{-n} - q^{2n} z_1^n) z^{-n} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q} \frac{1}{n} (z_1^n - q^{2n} z_1^{-n}) z^n] \end{aligned}$$

6°) Une forme remarquable du potentiel complexe dans le cas de la translation.

M. Y. KOMATU a déterminé le potentiel complexe de l'écoulement autour d'un couple de profils investi par un flot de vitesse donnée à l'infini. Nous allons vérifier que le potentiel (III.5.1) dans le cas de la translation ($\omega = 0$) est égal à la somme de deux termes : $(\ell - im)z$ et le potentiel de M. KOMATU correspondant à une vitesse opposée, c'est à dire à : [Komatu 2]

$$\begin{aligned} \text{(III.6.1)} \quad f(z) &= (\ell - im)z - \frac{i(\ell - im) K(z_1)}{z_1} \zeta \left(i \log \frac{z}{z_1} \right) \\ &+ \frac{i(\ell + im) \overline{K(z_1)}}{z_1} \zeta_3 \left(i \log z_1 z \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\pi} \gamma \left\{ \frac{(\Gamma + \Gamma') K(Z_1)}{Z_1} \right\} \log Z - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z \\
 & = \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \left\{ \left[\frac{2\eta_1}{\pi} \log Z_1 - \frac{1}{2} \right] \log Z \right. \\
 & \quad \left. + \log \frac{\sigma(i \log Z_1 Z)}{\sigma(i \log \frac{Z}{Z_1})} \right\} + \text{constante.}
 \end{aligned}$$

où les demi-périodes sont :

$$\omega_1 = \pi ; \quad \omega_3 = i \log q^{-2}$$

et où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \zeta(\omega_1) = \zeta(\pi) \\
 \eta_3 &= \zeta(\omega_3)
 \end{aligned}$$

Considérons d'abord les termes en $\frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi}$.

Les formules (III.4.1) et (III.4.2) permettent de transformer le coefficient de $\frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi}$ du potentiel (III.5.1). En tenant compte de $\omega = \pi$, $a = Z_1$, $s = 0$, nous devons vérifier la relation :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} - \frac{2\eta_1}{\pi} \log Z_1 \right) \log Z + \log \frac{\sigma(i \log \frac{Z}{Z_1})}{\sigma_3(i \log \frac{Z}{Z_1})} \\
 & = \log(Z - Z_1) - \log \sin \left(\frac{\log \frac{Z}{Z_1}}{2i} \right) + \frac{4\eta_1 \log Z_1}{i} \left(\frac{\log Z}{2\pi i} \right) \\
 & \quad + \log \frac{\sigma(\frac{1}{i} \log \frac{Z}{Z_1})}{\sigma_3(\frac{1}{i} \log \frac{Z}{Z_1})} + \text{constante.}
 \end{aligned}$$

Les termes en $\log Z_1 \cdot \log Z$ disparaissent ; les derniers termes de chaque membre sont égaux, car les fonctions σ et σ_3 sont impaires. Il suffit donc de vérifier que :

$$\log \sin \left(\frac{\log \frac{Z}{Z_1}}{2i} \right) = \log (Z - Z_1) - \log \sqrt{Z Z_1} + \text{constante}$$

ce qui est immédiat quand on exprime le sinus en utilisant la formule d'Euler.

Les expressions (III.4.1) et (III.4.2) d'une part et (III.4.3) et (III.4.4) d'autre part diffèrent d'une constante. Si nous comparons leurs dérivées par rapport à Z et si nous tenons compte des formules :

$$\frac{d}{du} \log \sigma(u) = \zeta(u) \quad ; \quad \frac{d}{du} \log \sigma_3(u) = \zeta_3(u)$$

nous obtenons aisément :

$$\begin{aligned} \text{(III.6.2)} \quad i \zeta \left(i \log \frac{Z}{Z_1} \right) &= \frac{Z}{Z - Z_1} - \frac{\eta_1}{\pi} \log Z + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{4n}}{1 - q^{4n}} (Z_1^n Z^{-n} - Z_1^{-n} Z^n) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta_1}{\pi} \log Z_1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III.6.3)} \quad i \zeta_3 \left(i \log Z_1 Z \right) &= - \frac{\eta_1}{\pi} \log Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} (Z_1^{-n} Z^{-n} - Z_1^n Z^n) \\ &\quad - \frac{\eta_1}{\pi} \log Z_1 . \end{aligned}$$

Ces formules vont nous permettre d'achever la vérification. Le coefficient de $2 + im$ dans le potentiel (III.6.1) est alors :

$$\frac{K(Z_1)}{Z_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} (Z_1^{-n} Z^{-n} - Z_1^n Z^n)$$

c'est-à-dire en utilisant les formules du chapitre II :

$$\frac{K(Z_1)}{Z_1} = -(\alpha_0 - \beta_0)$$

$$\alpha_n - \beta_n = Z_1^{-n} (\alpha_0 - \beta_0) ; \quad \alpha_{-n} - \beta_{-n} = Z_1^n (\alpha_0 - \beta_0) \quad (n \text{ entier } \geq 1) :$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} [(\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n) Z^{-n} - (\bar{\alpha}_{-n} - \bar{\beta}_{-n}) Z^n] .$$

C'est bien le coefficient de $l + im$ dans (III.5.1) compte tenu de (III.3.1).

Le coefficient de $l - im$ dans le potentiel (III.6.1) peut s'écrire :

$$\frac{K(Z)}{Z - Z_1} - \frac{K(Z_1)}{Z_1} \left[\frac{Z}{Z - Z_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{4n}}{1-q^{4n}} (Z_1^n Z^{-n} - Z_1^{-n} Z^n) \right]$$

c'est-à-dire :

$$\frac{Z_1 K(Z) - Z K(Z_1)}{Z_1 (Z - Z_1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} [(\alpha_n - \beta_n) Z^n - (\alpha_{-n} - \beta_{-n}) Z^{-n}]$$

Le premier terme, dans lequel le pôle Z_1 disparaît, est développable en série de Laurent pour $q \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$; cette série est facile à former.

Ecrivons en effet le terme en question sous la forme :

$$H(Z) + (\alpha_0 - \beta_0) \frac{Z}{Z - Z_1}$$

Pour $q \leq |Z| < Z_1$, il devient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} Z^{-n} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n Z^n + (\alpha_0 - \beta_0) \sum_{n=1}^{+\infty} (-Z_1^{-n}) Z^n$$

donc, en tenant compte de $\alpha_n - \beta_n = Z_1^{-n} (\alpha_0 - \beta_0)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} Z^{-n} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n Z^n$$

Pour $Z_1 < |Z| \leq \frac{1}{q}$, nous avons le même résultat.

Comme les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n Z^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} Z^{-n}$ sont absolument convergentes pour $|Z| \leq \frac{1}{q}$ et $|Z| \geq q$ respectivement, nous obtenons :

$$\frac{Z_1 K(Z) - Z K(Z_1)}{Z_1 (Z - Z_1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} Z^{-n} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n Z^n$$

pour $q \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$.

Nous pouvons alors facilement vérifier que le coefficient en question est, à la constante α_0 près, celui de $\ell - im$ dans le potentiel (III.5.1).

Malgré sa forme remarquable, le potentiel (III.6.1) est beaucoup moins maniable que le potentiel (III.5.1). En outre, dès que l'on introduit une rotation du couple de profils, les fonctions elliptiques ne sont d'aucune utilité.

7°) Le cas où les profils présentent chacun une pointe.

Quand les profils (c) et (c') présentent chacun une pointe, $H'(Z)$ s'annule aux points $Z = q e^{is_1}$ et $Z = q^{-1} e^{is'_1}$

images de ces points dans le plan de la couronne circulaire.

Pour que la vitesse fluide reste finie aux pointes, il faut, en outre, que $\frac{df}{dZ}$ s'annule pour $Z = q e^{is_1}$ et $Z = q^{-1} e^{is'_1}$.

Ecrivons $\frac{df}{dZ}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dZ} = \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{+\infty} n (A_n Z^n - B_n Z^{-n}) \\ - \frac{i\Gamma}{2\pi} + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \left[\frac{Z}{Z - Z_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} (Z_1^n - q^{2n} Z_1^{-n}) Z^n \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} (Z_1^{-n} - q^{2n} Z_1^n) Z^{-n} \right] \end{aligned}$$

Nous obtenons alors les conditions de Joukowski :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n (A_n q^n e^{n is_1} - B_n q^{-n} e^{-n is_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \left\{ \frac{q e^{is_1}}{q e^{is_1} - Z_1} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} [(Z_1^n - q^{2n} Z_1^{-n}) q^n e^{n is_1} - (Z_1^{-n} - q^{2n} Z_1^n) q^{-n} e^{-n is_1}] \right\} = 0 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} n (A_n q^{-n} e^{n is'_1} - B_n q^n e^{-n is'_1}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \\ + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \left\{ \frac{q^{-1} e^{is'_1}}{q^{-1} e^{is'_1} - Z_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} [(Z_1^n - q^{2n} Z_1^{-n}) q^{-n} e^{n is'_1} \right. \\ \left. - (Z_1^{-n} - q^{2n} Z_1^n) q^n e^{-n is'_1}] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Précisons d'abord les coefficients de $\frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi}$

Le premier devient, si l'on tient compte de la formule :

$$\frac{q e^{i s_1}}{q e^{i s_1} - Z_1} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n e^{n i s_1}}{Z_1^n} ,$$

$$\gamma_1 = - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{1-q^{4n}} (Z_1^{-n} - q^{2n} Z_1^n) \cos n s_1$$

De même, le second s'écrit :

$$\gamma_1' = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{1-q^{4n}} (Z_1^n - q^{2n} Z_1^{-n}) \cos n s_1'$$

Ils sont donc réels .

Montrons encore que les premiers termes des premiers membres sont imaginaires purs.

Il suffit de remarquer que ce sont les valeurs de $Z \cdot \frac{dG}{dZ}$

aux pointes. Or, les conditions aux limites donnent :

$$\Im [dG - (\ell - im) dz + iw \bar{z} dz]_{C \text{ et } C'} = 0 ,$$

donc en remarquant que $\frac{dz}{dZ}$ est nul aux pointes :

$$\Im \left[\frac{dG}{dZ} \cdot dZ \right]_{\text{aux pointes}} = 0$$

et comme Z et dZ sont orthogonaux sur (C) et (C') :

$$\left(\frac{dG}{dZ} \cdot Z \right)_{\text{aux pointes}} \text{ est imaginaire pur.}$$

Le système fourni par les conditions de Joukowski est donc linéaire à coefficients imaginaires purs par rapport à Γ et Γ' .

Nous allons préciser les premiers termes des premiers membres en utilisant les expressions de A_n et B_n trouvées au paragraphe 3 du présent chapitre.

Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} n (A_n q^n e^{is_1})$ en fonction de l, m, w

Coefficient de l .

Il s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} [q^n e^{is_1} (-\bar{\alpha}_{-n} + \bar{\beta}_{-n} + \bar{\alpha}_n q^{2n} - \beta_n q^{-2n}) - q^{-n} e^{-n is_1} (-\alpha_{-n} q^{-2n} + \beta_{-n} q^{2n} + \bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n)]$$

Mais sur la circonférence (C) et même pour $q \leq |Z| \leq Z_1 - \epsilon$:

$$H'(Z) = \frac{1}{Z} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n (\alpha_n Z^n - \alpha_{-n} Z^{-n}) \right]$$

si nous admettons que la série y est uniformément convergente.

Puisque $H'(q e^{is_1}) = 0$, il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n (\alpha_n q^n e^{n is_1} - \alpha_{-n} q^{-n} e^{-n is_1}) = 0$$

ou encore :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} [\alpha_n q^n e^{n is_1} + \alpha_{-n} q^{-3n} e^{-n is_1}]$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} [\alpha_n q^{-n} e^{n i s_1} + \alpha_{-n} q^n e^{-n i s_1}]$$

Le coefficient de l se met alors sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} [(\alpha_n - \beta_n) q^{-n} e^{n i s_1} - (\bar{\alpha}_{-n} - \bar{\beta}_{-n}) q^n e^{n i s_1} + (\alpha_{-n} - \beta_{-n}) q^n e^{-n i s_1} - (\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n) q^{-n} e^{-n i s_1}]$$

et finalement, en utilisant la relation :

$$\alpha_n - \beta_n = Z_1^{-n} (\alpha_0 - \beta_0) \quad (n \text{ entier quelconque}) :$$

sous la forme :

$$i A_1 = 2i \Im \{ (\alpha_0 - \beta_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} [(q Z_1)^{-n} e^{n i s_1} + (q Z_1)^n e^{-n i s_1}] \}$$

Coefficient de m :

Un calcul analogue donne :

$$i B_1 = -2i \Re \{ (\alpha_0 - \beta_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} [(q Z_1)^{-n} e^{n i s_1} + (q Z_1)^n e^{-n i s_1}] \}$$

Coefficient de ω :

Il s'écrit :

$$- i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} [(\bar{\alpha}'_{-n} - \bar{\beta}'_{-n}) q^n e^{n i s_1} + (\alpha'_{-n} q^{-2n} - \beta'_{-n} q^{2n}) q^{-n} e^{-n i s_1}]$$

Or nous avons, pour $q \leq |Z| \leq Z_1$ on a :

$$H\left(\frac{q^2}{Z}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha'_{-n} Z^{-n} + \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha'_n Z^n,$$

donc en admettant la légitimité de la dérivation terme à terme :

$$H'(Z) \cdot H\left(\frac{q^2}{Z}\right) + \frac{1}{2} H(Z) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n (\bar{\alpha}_{-n} q^{-2n} Z^n - \bar{\alpha}_n q^{2n} Z^{-n}) \right]$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{+\infty} n (\alpha'_n Z^n - \alpha'_{-n} Z^{-n})$$

Pour $Z = q e^{is_1}$, le premier membre est nul, car :

$$H'(q e^{is_1}) = 0$$

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} n (\bar{\alpha}_{-n} q^{-n} e^{n is_1} - \bar{\alpha}_n q^n e^{-n is_1})$$

$$= - q e^{is_1} \cdot H'(q e^{is_1}) = 0$$

Par suite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n (\alpha'_n q^n e^{n is_1} - \alpha'_{-n} q^{-n} e^{-n is_1}) = 0$$

et puisque :

$$\alpha'_{-n} q^{-n} = \bar{\alpha}'_n q^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n (\alpha'_n q^n e^{n is_1} - \bar{\alpha}'_n q^n e^{-n is_1}) = 0$$

Quand la différence de deux nombres conjugués est nulle, les deux nombres sont réels et égaux. D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha'_n q^n e^{n is_1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha'_n q^{-n} e^{-n is_1} \quad \text{réels.}$$

Le coefficient de ω peut alors s'écrire :

$$i C_1 = -2i \Re \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^n}{q^{2n} - q^{-2n}} (\alpha'_{-n} - \beta'_{-n}) e^{-n is_1} \\ + i \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha'_n q^{-n} e^{-n is_1}$$

Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} n (A_n q^{-n} e^{n is'_1} - B_n q^n e^{-n is'_1})$ en fonction de ℓ, m, ω

Un procédé analogue conduit aux résultats suivants :

Coefficient de ℓ .

$$i A'_1 = 2i \Im \{ (\alpha_0 - \beta_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \left[\left(\frac{q}{Z_1} \right)^n e^{n is'_1} + \left(\frac{q}{Z_1} \right)^{-n} e^{-n is'_1} \right] \}$$

Coefficient de m .

$$i B'_1 = -2i \Re \{ (\alpha_0 - \beta_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \left[\left(\frac{q}{Z_1} \right)^n e^{n is'_1} + \left(\frac{q}{Z_1} \right)^{-n} e^{-n is'_1} \right] \}$$

Coefficient de ω .

$$i C'_1 = -2i \Re \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{-n}}{q^{2n} - q^{-2n}} (\alpha'_{-n} - \beta'_{-n}) e^{-n is'_1} + i \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta'_n q^n e^{-n is'_1}$$

Les coefficients A'_1, B'_1, C'_1 sont réels comme A_1, B_1, C_1 .

Les conditions de Joukowski s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \Gamma - \gamma_1 (\Gamma + \Gamma') = 2\pi (A_1 \ell + B_1 m + C_1 \omega) \\ \Gamma - \gamma_1' (\Gamma + \Gamma') = 2\pi (A_1' \ell + B_1' m + C_1' \omega) \end{cases}$$

8°) Existence et étude cinématique des mouvements à circulations constantes des couples de profils à pointes.

Les relations précédentes montrent que dans les mouvements les plus généraux des couples de profils à pointe, les circulaires Γ et Γ' varient au cours du temps ; le théorème de la conservation tourbillonnaire est en défaut et il y a échappement de tourbillons aux pointes des profils. Mais il existe une famille de mouvements à circulations constantes (évidemment plus restreinte, en général, que pour le profil unique) caractérisé par les relations :

$$(III.8.1) \quad \begin{cases} A_1 \ell + B_1 m + C_1 \omega = k_1 \\ A_1' \ell + B_1' m + C_1' \omega = k_1' \end{cases}$$

où k_1 et k_1' sont des constantes :

$$k_1 = \frac{\Gamma - \gamma_1 (\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \quad ; \quad k_1' = \frac{\Gamma - \gamma_1' (\Gamma + \Gamma')}{2\pi}$$

Si nous nous donnons à chaque instant la direction de la vitesse d'un point lié au couple de profils, nous pouvons déterminer l'orientation de celui-ci.

Soit en effet, un point M de coordonnées p et q dans le repère Oxy lié aux profils. Désignons par $V \cos \alpha$, $V \sin \alpha$

les composantes sur les axes fixes $O_1 x_1 y_1$ de sa vitesse absolue.

Des relations

$$V \cos (\alpha - \theta) = l + \omega q \quad ; \quad V \sin (\alpha - \theta) = m + \omega p$$

nous tirons :

$$V [A_1 \cos (\alpha - \theta) + B_1 \sin (\alpha - \theta)] + [A_1 q - B_1 p + C_1] \frac{d\theta}{dt} = k_1$$

$$V [A'_1 \cos (\alpha - \theta) + B'_1 \sin (\alpha - \theta)] + [A'_1 q - B'_1 p + C'_1] \frac{d\theta}{dt} = k'_1$$

Supposons connu à chaque instant l'angle α . L'élimination de V fournit une équation différentielle permettant le calcul de θ en fonction de t ; donc si la direction de la vitesse de M est donnée, il existe une infinité de mouvements à circulations données Γ et Γ' . Pour chacun d'eux, nous pouvons déterminer facilement V . Un cas remarquable est celui où le point considéré est le point de rencontre K des droites (Δ) et (Δ') liées au couple de profils d'équations :

$$\begin{cases} A_1 y - B_1 x + C_1 = 0 \\ A'_1 y - B'_1 x + C'_1 = 0 \end{cases}$$

θ est alors donné par l'équation transcendante :

$$\operatorname{tg} (\theta - \alpha) = \frac{k_1 A'_1 - k'_1 A_1}{k_1 B'_1 - k'_1 B_1}$$

qui fournit deux valeurs de θ qui diffèrent de Π .

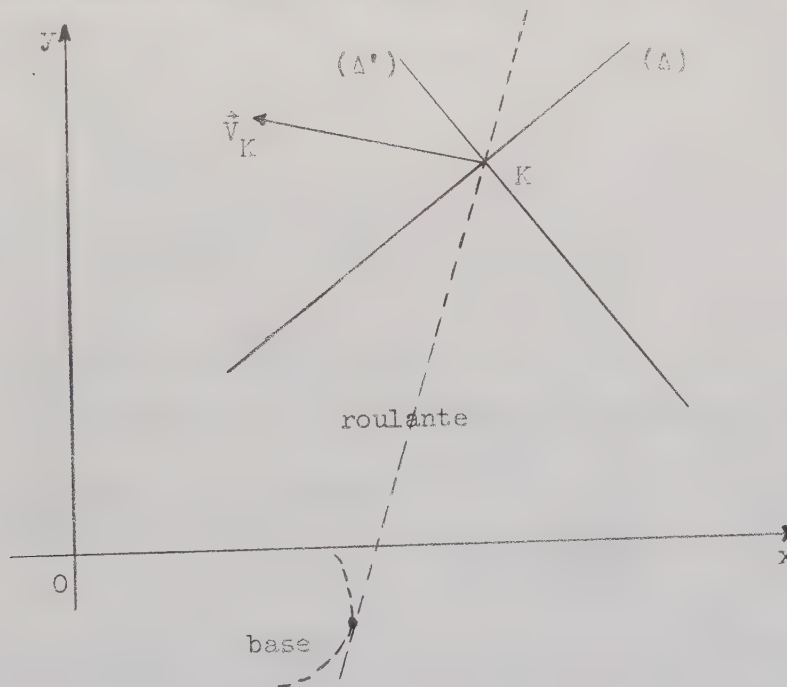
Les relations (III.8.1) montrent :

1).- que les vitesses de glissement des droites (Δ) et (Δ') sur leurs enveloppes sont constantes et que par suite, la vitesse du point K a un module constant.

2).- que la roulante du mouvement est la droite d'équation :

$$k_1' (A_1' y - B_1' x + C_1') - k_1 (A_1 y - B_1 x + C_1) = 0$$

laquelle passe par $K [x_K, y_K]$.



[Fig. 15]

Nous pouvons déterminer à chaque instant l'orientation du couple de profils grâce à la construction suivante obtenue en remarquant que les vitesses de glissement de (Δ) et (Δ') comptées sur ces droites orientées par les vecteurs de composantes (A_1, B_1) et (A_1', B_1') sont $\frac{k_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$, $\frac{k_1'}{\sqrt{A_1'^2 + B_1'^2}}$.

Les relations (III.8.1) montrent alors que

$$\omega = \text{constante} ; A_1 \ell + B_1 m = \text{constante}$$

La roulante est toujours une droite.

Il semble difficile de caractériser géométriquement les couples de profils satisfaisant aux conditions précitées, mais nous vérifions aisément que parmi eux se trouvent les couples symétriques par rapport à l'origine. En effet, dans ce cas, $Z_1 = 1$;

$$s'_1 = -s_1 \text{ et par suite } A_1 = A'_1, B_1 = B'_1.$$

Les droites (Δ) et (Δ') sont confondues et K est indéterminé sur elles lorsque $\frac{A_1}{A'_1} = \frac{B_1}{B'_1} = \frac{C_1}{C'_1}$.

Nous verrons plus loin que cette circonstance se produit pour certains couples de profils symétriques par rapport à l'axe réel. Les relations (III.8.1) se réduisent à la seule relation :

$$A_1 \ell + B_1 m + C_1 \omega = \text{constante}$$

qui exprime que la droite (Δ) a une vitesse de glissement constante.

Du point de vue cinématique, le couple de profils se comporte comme un profil isolé. [Couchet 1]

9°) Examen de quelques cas particuliers remarquables.

a).- Les profils sont symétriques par rapport à l'origine.

Dans ce cas où :

$$Z_1 = 1 ; s'_1 = -s_1$$

$$\beta_n = -\alpha_{-n} ; \beta'_n = \alpha'_{-n} \quad (n \text{ entier quelconque}) ,$$

nous avons :

$$\gamma_1 = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n s_1}{1 + q^{2n}}$$

$$\gamma'_1 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n s_1}{1 + q^{2n}}$$

$$-B_1 + i A_1 = -B'_1 + i A'_1 = 4 \alpha_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} (q^{-n} e^{n i s_1} + q^n e^{-n i s_1})$$

$$C_1 = \Re \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha'_{-n} q^{-n} e^{-n i s_1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^n}{q^{2n} - q^{-2n}} (\alpha'_n - \alpha'_{-n}) e^{-n i s_1} \right]$$

$$C'_1 = \Re \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha'_n q^n e^{n i s_1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{-n}}{q^{2n} - q^{-2n}} (\alpha'_n - \alpha'_{-n}) e^{n i s_1} \right]$$

Il est facile de voir que C_1 et C'_1 sont opposées. En effet, leur somme peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \Re \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} e^{-n i s_1} [2 \alpha'_n q^n - \alpha'_{-n} (q^n + q^{-3n})] \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} e^{n i s_1} [\alpha'_n (q^{3n} + q^{-n}) - 2 \alpha'_{-n} q^{-n}] \right\} \end{aligned}$$

En remplaçant α'_n par $\bar{\alpha}'_{-n} q^{-2n}$ et α'_{-n} par $\bar{\alpha}'_n q^{2n}$, nous constatons que le premier $\sum$ est l'opposé du conjugué du second, ce qui démontre que $C_1 + C'_1 = 0$.

Nous avons donc :

$$\begin{cases} \Gamma - \Gamma' = L \ell + M m \\ \Gamma + \Gamma' = \Omega \omega \end{cases}$$

avec :

$$L = 4\pi A_1' ; \quad M = 4\pi B_1' ; \quad \Omega = \frac{4\pi C_1}{1 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n s_1}{1 + q^{2n}}}$$

Dans un mouvement à circulations constantes, ω reste constant ;
si c'est une translation à circulations constantes (en particulier
une translation uniforme), les circulations sont opposées ; enfin
si l'origine est fixe, les circulations sont égales.

b).- Les profils sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Dans ce cas où :

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 ; \quad s_1' = s_1 \\ \beta_n &= \bar{\alpha}_{-n} ; \quad \beta_n' = \bar{\alpha}_{-n}' \quad (n \text{ entier quelconque}) \end{aligned}$$

nous avons :

$$\gamma_1 = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n s_1}{1 + q^{2n}}$$

$$\gamma_1' = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n s_1}{1 + q^{2n}}$$

$$A_1 = A_1' = 2 \Im \left[(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} (q^{-n} e^{n i s_1} + q^n e^{-n i s_1}) \right]$$

$$B_1 = -B_1' = -2 \Re \left[(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} (q^{-n} e^{n i s_1} + q^n e^{-n i s_1}) \right]$$

$$C_1 = \Re \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha'_{-n} q^{-n} e^{-n i s_1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^n}{q^{2n} - q^{-2n}} (\bar{\alpha}'_n - \alpha'_{-n}) e^{-n i s_1} \right\}$$

$$C'_1 = \Re \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha'_n q^n e^{-n i s_1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{-n}}{q^{2n} - q^{-2n}} (\bar{\alpha}'_n - \alpha'_{-n}) e^{-n i s_1} \right\}$$

On peut montrer comme précédemment que C_1 et C'_1 sont opposés.

Nous avons donc :

$$\begin{cases} \Gamma - \Gamma' = L \ell \\ \Gamma + \Gamma' = M m + \Omega \omega \end{cases}$$

avec

$$L = 4\pi A_1 = \frac{8\pi}{i} (\alpha_o - \bar{\alpha}_o) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos n s_1}{q^n - q^{-n}}$$

$$M = \frac{4\pi B_1}{1 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n s_1}{1 + q^{2n}}} ; \quad \Omega = \frac{4\pi C_1}{1 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n \cos n s_1}{1 + q^{2n}}}$$

Dans un mouvement à circulations constantes, ℓ reste constant ; s'il est nul, les circulations sont égales ; si m et ω sont nuls (translation uniforme parallèle à l'axe de symétrie), Γ et Γ' sont opposées.

Il y a cependant un cas exceptionnel, celui où le coefficient L est nul.

$$\text{Comme } \alpha_o - \bar{\alpha}_o = - \frac{K(Z_1)}{Z_1} = -K(1) \text{ est différent de zéro}$$

(Z_1 n'annulant pas $K(Z)$), cette circonstance se produit pour les couples de profils à pointes symétriques par rapport à l'axe réel jouissant de la propriété suivante : l'argument s_1 des

images des pointes dans le plan de la couronne circulaire est lié à q (donc au module q^{-2} du domaine extérieur au couple) par la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos n s_1}{q^n - q^{-n}} = 0$$

Nous allons donner des exemples de tels couples. Signalons tout de suite les résultats remarquables suivants : dans un mouvement à circulations constantes, les circulations sont toujours égales et le couple de profils se comporte du point de vue cinématique comme un profil isolé. [Voir le paragraphe 8 du présent chapitre].

c).- Le biplan droit.

Si nous utilisons les notations du chapitre II , s_1 est racine de l'équation

$$p(\omega_3 + s_1) = -\frac{\eta_1}{\Pi}$$

Or nous avons la formule : [Tannery 1]

$$p(\omega_3 + u) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{2\Pi^2}{\omega_1^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \cos \frac{n\Pi u}{\omega_1}$$

Remplaçons dans cette formule ω_1 par Π et u par s_1 ; il vient

$$p(\omega_3 + s_1) = -\frac{\eta_1}{\Pi} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^n - q^{-n}} \cos n s_1$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^n - q^{-n}} \cos n s_1 = 0$$

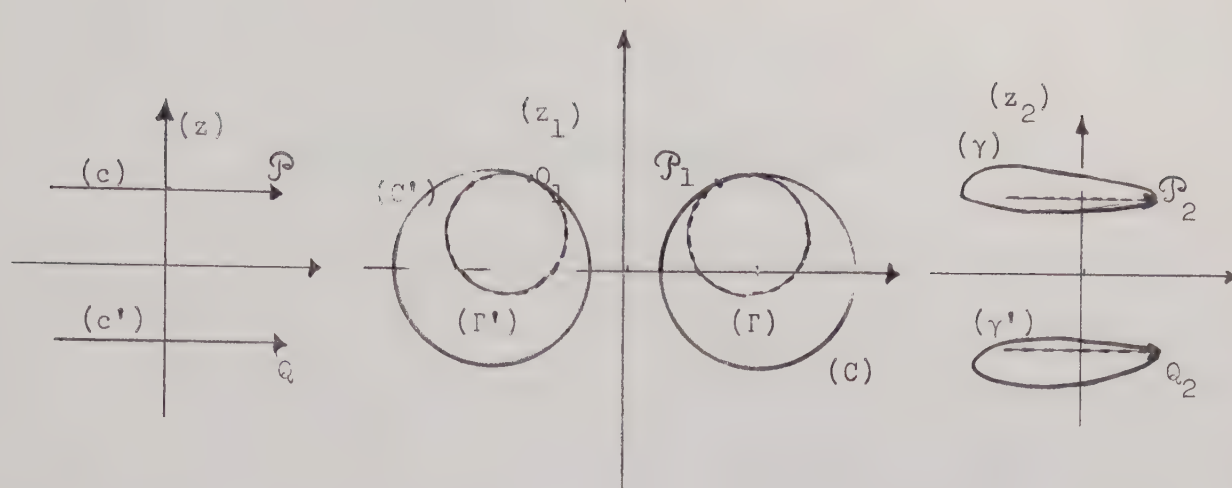
Le biplan droit fait donc partie des couples de profils spéciaux que nous venons de considérer. Notons que l'égalité des circulations avait été démontrée, mais seulement dans le cas de la translation uniforme [Glauert 1]

Nous obtenons des couples de profils à pointe jouissant des mêmes propriétés en effectuant une représentation conforme de l'extérieur du biplan droit sur l'extérieur de deux profils à pointe symétriques par rapport à l'axe réel, avec correspondance des pointes.

Un exemple remarquable d'une telle représentation conforme est celui de M. C. FERRARI (Voir introduction).

Soit en effet, un biplan droit (c) , (c') dans le plan (z) , les pointes étant $\mathcal{P}$ et Q ; l'extérieur de ce couple peut être transformé en l'extérieur de deux cercles (C) et (C') symétriques par rapport à l'axe imaginaire du plan (z_1) , les images $\mathcal{P}_1$ et Q_1 des pointes étant symétriques par rapport à cet axe [Kober 1].

Considérons deux cercles (r) et (r') symétriques également par rapport à l'axe imaginaire, intérieurs à (C) et (C') respectivement et tangents à ces derniers cercles en $\mathcal{P}_1$ et Q_1 . L'extérieur du couple (r) , (r') peut être transformé en l'extérieur d'un biplan droit du plan (z_2) dont les pointes $\mathcal{P}_2$ et Q_2 sont les homologues de $\mathcal{P}_1$ et Q_1 .



[Fig 17]

Dans cette dernière transformation, (C) et (C') deviennent deux profils (γ) et (γ') de M. FERRARI, symétriques par rapport à l'axe réel du plan (z) et présentant des pointes en P_2 et Q_2 . On peut donc transformer l'extérieur du biplan droit (c) , (c') en l'extérieur du couple (γ) , (γ') avec correspondance des pointes. [Fig 17].

---:---:---:---:---:---:---:---

CHAPITRE IV

Le calcul des efforts aérodynamiques.

Le présent chapitre est consacré au calcul effectif des efforts globaux exercés par le fluide sur un couple de profils. Les résultats obtenus nous permettent de déterminer les axes principaux du couple et d'étudier du point de vue dynamique le comportement d'un couple de profils animé d'un mouvement à circulations constantes.

Remarque préliminaire.-

Si nous posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \frac{\alpha_n q^{2n} - \beta_n q^{-2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} \\ B_n = - \frac{\bar{\alpha}_{-n} - \bar{\beta}_{-n}}{q^{2n} - q^{-2n}} \\ C_n = - \frac{\alpha'_{-n} - \beta'_{-n}}{q^{2n} - q^{-2n}} \end{array} \right. \quad (n \text{ entier positif ou négatif, non nul})$$

nous obtenons pour dérivée par rapport à Z du potentiel complexe $F(Z)$ [formule (III.5.1)] :

$$\frac{dF}{dZ} = F_1(Z) + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \cdot \frac{1}{Z - Z_1}$$

où :

$$\begin{aligned}
 F_1(Z) = & \frac{1}{Z} \{ (\ell - i\mu) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{A}_n Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{A}_{-n} Z^{-n} \right] \\
 & + (\ell + i\mu) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{B}_n Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{B}_{-n} Z^{-n} \right] \\
 & + i\omega \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{C}_n Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{C}_{-n} Z^{-n} \right] \\
 & - \frac{i\Gamma}{2\pi} + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} (Z_1^n - q^{2n} Z_1^{-n}) Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} \right. \\
 & \left. (Z_1^{-n} - q^{2n} Z_1^n) Z^{-n} \right]
 \end{aligned}$$

$F_1(Z)$ est holomorphe pour $q \leq |Z| \leq \frac{1}{q}$.

1°) La résultante des efforts globaux.

Désignons par X_c , Y_c les composantes sur les axes Ox , Oy liés au couple de ^{la} résultante des efforts du fluide sur le profil (c). Nous pouvons écrire [Couchet], en passant au plan de la couronne :

$$\begin{aligned}
 X_c - iY_c = & \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 \frac{1}{\frac{dz}{dZ}} dZ - i\rho (\ell - i\mu) \int_C \frac{df}{dZ} dZ - \rho\omega \overline{\int_C z \frac{dF}{dZ} dZ} \\
 & + i\rho \overline{\int_C \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dz}{dZ} dZ} + \rho\mathcal{A}[\ell' - i\mu' - i\omega (\ell - i\mu) - \bar{\zeta}_c (\omega^2 + i\omega')]
 \end{aligned}$$

Avec des notations analogues, nous obtenons pour le profil (c'), en tenant compte de la correspondance des sens sur (c') et (C') :

$$X_{C'} - iY_{C'} = -\frac{i\rho}{2} \int_{C'} \left(\frac{dF}{dZ}\right)^2 \frac{1}{\frac{dz}{dZ}} dZ + i\rho (\ell - im) \int_{C'} \frac{dF}{dZ} dZ + \rho \omega \overline{\int_{C'} z \frac{dF}{dZ} dZ} \\ - i\rho \overline{\int_{C'} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dz}{dZ} dZ} + \rho \alpha' [\ell' - im' - i\omega (\ell - im) - \bar{\zeta}_c, (\omega^2 + i\omega')]]$$

Par addition, nous avons pour la résultante globale, avec des notations évidentes :

$$X_T - iY_T = -\frac{i\rho}{2} \int_{C' - \check{C}} \left(\frac{dF}{dZ}\right)^2 \frac{1}{\frac{dz}{dZ}} dZ + i\rho (\ell - im) \int_{C' - \check{C}} \frac{dF}{dZ} dZ \\ + \rho \omega \overline{\int_{C' - \check{C}} z \frac{dF}{dZ} dZ} - i\rho \overline{\int_{C' - \check{C}} \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dz}{dZ} dZ} \\ + \rho (\alpha + \alpha') [\ell' - im' - i\omega (\ell - im)] + \rho [\alpha \bar{\zeta}_c + \alpha' \bar{\zeta}_{c'}] (\omega^2 + i\omega')$$

Nous allons calculer ces diverses intégrales.

$$\text{Calcul de } -\frac{i\rho}{2} \int_{C' - \check{C}} \left(\frac{dF}{dZ}\right)^2 \frac{1}{\frac{dz}{dZ}} dZ \quad .$$

$\frac{dz}{dZ}$ n'a pas de zéro dans la couronne et y admet le pôle double $Z = Z_1$.

L'intégrale s'écrit donc :

$$-\frac{i\rho}{2} \int_{C' - \check{C}} \left[F_1(Z) + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \cdot \frac{1}{Z - Z_1} \right]^2 \cdot \frac{(Z - Z_1)^2}{\text{fonction holomorphe sans zéro}} dZ$$

Puisque le pôle double disparaît, cette intégrale est nulle.

$$\text{Calcul de } i\rho (\ell - im) \int_{C' - \check{C}} \frac{dF}{dZ} dZ .$$

Nous trouvons immédiatement :

$$\underline{-i\rho (\Gamma + \Gamma') (\ell - im)}$$

Calcul de $\rho \omega \int_{C'-C} z \frac{dF}{dZ} dZ$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{C'-C} z \frac{dF}{dZ} dZ &= \int_{C'-C} \frac{K(Z)}{Z - Z_1} [F_1(Z) + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \cdot \frac{1}{Z - Z_1}] dZ \\ &= \int_{C'-C} \frac{K(Z) \cdot F_1(Z)}{Z - Z_1} dZ + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \int_{C'-C} \frac{K(Z)}{(Z - Z_1)^2} dZ \end{aligned}$$

Les numérateurs étant holomorphes dans la couronne, il vient :

$$2\pi i K(Z_1) \cdot F_1(Z_1) - (\Gamma + \Gamma') K'(Z_1)$$

Posons :

$$A = K'(Z_1) + \frac{K(Z_1)}{Z_1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} (Z_1^{2n} - Z_1^{-2n}) - 1 \right]$$

$$A' = K'(Z_1) + \frac{K(Z_1)}{Z_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} (Z_1^{2n} - Z_1^{-2n})$$

et en tenant compte de $\frac{K(Z_1)}{Z_1} = -(\alpha_0 - \beta_0)$:

$$\mathcal{A}_0 = 2\pi (\alpha_0 - \beta_0) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{A}_n Z_1^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{A}_{-n} Z_1^{-n} \right]$$

$$\mathcal{B}_0 = 2\pi (\alpha_0 - \beta_0) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{B}_n Z_1^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{B}_{-n} Z_1^{-n} \right]$$

$$\mathcal{C}_0 = 2\pi (\alpha_0 - \beta_0) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{C}_n Z_1^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathcal{C}_{-n} Z_1^{-n} \right]$$

Nous obtenons :

$$\rho \omega \int_{C'-C} z \frac{dF}{dZ} dZ = - \rho \omega \Gamma \bar{A} - \rho \omega \Gamma' \bar{A}'$$

$$+ i \rho \omega [\bar{\mathcal{A}}_0 (\ell + i m) + \bar{\beta}_0 (\ell - i m) - i \bar{\ell}_0 \omega]$$

Calcul de $- i \rho \int_{C'-C} \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dz}{dZ} dZ$.

Dans la formule (III.5.1), les circulations sont des constantes de sorte que :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} ,$$

et cette fonction est holomorphe dans la couronne.

Nous avons donc :

$$\int_{C'-C} \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{dz}{dZ} dZ = \int_{C'-C} \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{K'(Z)(Z - Z_1) - K(Z)}{(Z - Z_1)^2} dZ$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dZ} \left\{ \frac{\partial G}{\partial t} [K'(Z) \cdot (Z - Z_1) - K(Z)] \right\}_{Z=Z_1}$$

C'est-à-dire :

$$2\pi i \left\{ \frac{d}{dZ} \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right) [K'(Z) \cdot (Z - Z_1) - K(Z)] \right\}_{Z=Z_1} + 2\pi i \left\{ \frac{\partial G}{\partial t} K''(Z)(Z - Z_1) \right\}_{Z=Z_1}$$

ou, en remarquant que $G = \ell G_1 + m G_2 + \omega G_3$:

$$- 2\pi i K(Z_1) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dG}{dZ} \right) \right]_{Z=Z_1}$$

Par suite :

$$- i \rho \int_{C'-C} \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dz}{dZ} dZ = - \rho [\bar{\mathcal{A}}_0 (\ell' + i m') + \bar{\beta}_0 (\ell' - i m') - i \bar{\ell}_0 \omega']$$

Finalement si nous posons :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 - (a + a') \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}_0 - (a z_c + a' z_{c'}) \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{(IV.1.1)} \quad X_T + iY_T &= ip\Gamma (\ell + im + i\omega A) + ip\Gamma' (\ell + im + i\omega A') \\ &- \rho \{ \mathcal{A} [\ell' - im' + i\omega (\ell - im)] + \mathcal{B} [\ell' + im' + i\omega (\ell + im)] \\ &\quad + \mathcal{C} (i\omega' - \omega^2) \} \end{aligned}$$

Considérons les axes orthonormés fixes $O_1 x_1, O_1 y_1$.
Désignons par A_1, A'_1 les affixes dans ce système des points d'affixes A, A' dans Ox, Oy . Appelons $(X_1 + iY_1)_T = (X_T + iY_T) e^{i\theta}$ l'affixe en axes fixes de la résultante des efforts.

Nous pouvons mettre $(X_1 + iY_1)_T$ sous la forme d'une dérivée par rapport au temps :

$$\text{(IV.1.2)} \quad (X_1 + iY_1)_T = \frac{d}{dt} \{ ip\Gamma A_1 + ip\Gamma' A'_1 - \rho [\mathcal{A}(\ell - im) + \mathcal{B}(\ell + im) + i\mathcal{C}\omega] e^{i\theta} \}$$

Remarque :

En utilisant l'expression de $\mathcal{B}_n$ du début de ce chapitre, nous vérifions aisément que $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont réels.

2°) Le moment résultant des efforts globaux.

Nous calculerons d'abord le moment par rapport à l'origine O des axes liés au couple de profils. Nous avons comme précédemment :
[Couchet 1] .

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^t = \Re \{ & \frac{\rho}{2} \int_{C'-C} \frac{H(Z)}{H'(Z)} \left(\frac{dF}{dZ} \right)^2 dZ - \rho (l-im) \int_{C'-C} H(Z) \frac{dF}{dZ} dZ \\ & + \frac{\rho}{2} \int_{C'-C} \frac{\partial F}{\partial t} d(z\bar{z}) + \rho (a\zeta_c + a'\zeta_{c'}) \omega (l-im) \} \end{aligned}$$

Calcul de $\frac{\rho}{2} \int_{C'-C} \frac{H(Z)}{H'(Z)} \left(\frac{dF}{dZ} \right)^2 dZ$.

Cette intégrale s'écrit :

$$\frac{\rho}{2} \int_{C'-C} \frac{K(Z)}{Z - Z_1} \cdot \frac{(Z - Z_1)^2}{K'(Z)(Z - Z_1) - K(Z)} [F_1(Z) + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \cdot \frac{1}{Z - Z_1}]^2 dZ$$

$H'(Z)$ n'a pas de zéro dans la couronne : nous avons donc à tenir compte du seul pôle simple $Z = Z_1$.

L'intégrale vaut donc :

$$\frac{\rho}{2} \times 2\pi i \times \left[\frac{K(Z)}{K'(Z)(Z - Z_1) - K(Z)} \right]_{Z=Z_1} \times \left(- \frac{(\Gamma + \Gamma')^2}{4\pi^2} \right)$$

Cette quantité est évidemment imaginaire pure. Sa partie réelle est donc nulle.

Calcul de $-\rho (l-im) \int_{C'-C} H(Z) \frac{dF}{dZ} dZ$.

Cette intégrale a été calculée dans le précédent paragraphe.

Nous avons :

$$-\rho (l-im) \{-\Gamma A - \Gamma' A' - i [\mathcal{A}_0 (l-im) + \mathcal{B}_0 (l+im) + i \mathcal{C}_0 \omega]\}$$

Calcul de $\frac{\rho}{2} \int_{C'-C} \frac{\partial F}{\partial t} d(z\bar{z})$.

Nous l'écrivons :

$$\frac{\rho}{2} \left[\int_C \frac{\partial F}{\partial t} d(z\bar{z}) - \int_{C'} \frac{\partial F}{\partial t} d(z\bar{z}) \right]$$

Dans la première intégrale, nous remplaçons $z\bar{z}$ par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_{-n} Z^{-n} + \beta'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_n Z^n ; \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial F}{\partial t} d(z\bar{z}) &= \int_C \frac{1}{Z} [(\ell' - im') \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{A}'_n Z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{A}'_{-n} Z^{-n} \right) \\ &\quad + (\ell' + im') \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_n Z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_{-n} Z^{-n} \right) + i\omega' \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{C}'_n Z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{C}'_{-n} Z^{-n} \right) \\ &\quad \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \beta'_n Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta'_{-n} Z^{-n} \right] dZ \end{aligned}$$

Dans la seconde, nous remplaçons $z\bar{z}$ par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha'_{-n} Z^{-n} + \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha'_n Z^n$$

et nous obtenons une formule semblable.

Finalement en considérant les termes constants dans le produit des crochets, il vient :

$$- \rho [\mathcal{A}' (\ell' - im') + \beta' (\ell' + im') + i \mathcal{C}' \omega']$$

en posant :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= - \Pi i \sum_{n=1}^{+\infty} n [\mathcal{A}'_n (\alpha'_{-n} - \beta'_{-n}) - \mathcal{A}'_{-n} (\alpha'_n - \beta'_n)] \\ \beta' &= - \Pi i \sum_{n=1}^{+\infty} n [\beta'_n (\alpha'_{-n} - \beta'_{-n}) - \beta'_{-n} (\alpha'_n - \beta'_n)] \\ \mathcal{C}' &= - \Pi i \sum_{n=1}^{+\infty} n [\mathcal{C}'_n (\alpha'_{-n} - \beta'_{-n}) - \mathcal{C}'_{-n} (\alpha'_n - \beta'_n)] \end{aligned}$$

(En utilisant l'expression de $\mathcal{C}'_n$ du début de ce chapitre, nous vérifions aisément que $\mathcal{C}'$ est imaginaire pur).

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \text{IV.2.1)} \quad &= \Re \{ \rho (l-im) (\Gamma A + \Gamma' A') + i \rho (l-im) [A (l-im) \\ &+ \beta (l+im) + i \ell \omega] - \rho [A' (l'-im') + \beta' (l'+im') + i \ell' \omega'] \} \end{aligned}$$

(dans cette expression, le terme $\Re i \rho (l-im) \cdot \beta (l+im)$ est d'ailleurs nul).

Nous vérifions immédiatement un résultat trouvé pour un multiplan : quand il y a des circulations autour des profils, il suffit d'ajouter aux efforts correspondant à des circulations nulles les forces de Joukowski associées à deux points du couple. Ces points, d'affixes A et A' dans le système Oxy lié au couple, sont ici parfaitement déterminés.

Utilisons les axes fixes $O_1 x_1 y_1$. Désignons par $x_0 + iy_0$ l'affixe de O dans ces axes et posons pour simplifier l'écriture :

$$(X_1 + iY_1)_T = \frac{dZ}{dt}$$

Le moment global en O_1 est :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{O_1}^t &= \mathcal{M}_O^t - \Re i (x_0 - iy_0) \frac{dZ}{dt} \\ &= - \frac{d}{dt} [\Re i (x_0 - iy_0) Z] + \mathcal{M}_O^t + \Re [i (l-im) Z e^{-i\theta}] \end{aligned}$$

Remplaçons dans les deux derniers termes $\mathcal{M}_O^t$ et Z par leurs valeurs ; nous obtenons après d'évidentes simplifications :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{O_1}^t &= - \frac{d}{dt} [\Re i (x_0 - iy_0) Z] - \rho [A' (l'-im') + \beta' (l'+im') + i \ell' \omega'] \\ &+ \Re \rho (l-im) (\Gamma A + A' \Gamma') + \Re i (l-im) [i \rho \Gamma A_1 + i \rho \Gamma' A'_1] e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Les deux derniers termes se simplifient en utilisant les formules :

$$A_1 e^{-i\theta} = A + (x_0 + iy_0) e^{-i\theta}$$

$$A'_1 e^{-i\theta} = A' + (x_0 + iy_0) e^{-i\theta}$$

et en remarquant que :

$$(\ell - im) e^{-i\theta} = \frac{dx_0}{dt} - i \frac{dy_0}{dt}$$

Nous obtenons :

$$- \frac{\rho}{2} (\Gamma + \Gamma') \frac{d}{dt} (x_0^2 + y_0^2)$$

Finalement, le moment en O_1 des efforts globaux se met sous la forme d'une dérivée par rapport au temps :

$$(4.2.2) \quad \mathcal{M}_{O_1}^t = - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho (\Gamma + \Gamma')}{2} (x_0^2 + y_0^2) + i (x_0 - iy_0) \left[i\rho\Gamma A_1 + i\rho\Gamma' A'_1 - \right. \right. \\ \left. \left. \rho [A(\ell - im) + B(\ell + im) + i\ell\omega] e^{i\theta} \right] + \rho [A'(\ell - im) + B'(\ell + im) + i\ell'\omega] \right\}$$

Rémarque :

Les résultats précédents montrent que, lorsque les circulations sont nulles, le torseur des efforts globaux a la même forme que dans le cas du profil isolé.

3°) Pseudo résultante cinétique et pseudo moment cinétique du fluide. Axes principaux du couple de profils. Force vive du fluide.

Plaçons nous dans le cas où les circulations Γ et Γ' sont nulles.

Les formules (IV.1.2) et (IV.2.2) permettent de définir (voir chapitre I) :

une pseudo résultante cinétique du fluide, dont l'affixe dans le repère

Oxy lié au couple est :

$$\rho [A(l-im) + \beta (l+im) + i \ell \omega] \quad (\beta \text{ réel})$$

un pseudo moment cinétique du fluide par rapport au point O :

$$\beta \rho [A' (l-im) + \beta' (l+im) + i \ell' \omega]$$

Nous allons effectuer la réduction des formes précédentes.

Désignons par r^2 et 2ϕ le module et l'argument de A ,
par ℓ_1 et ℓ_2 les parties réelles et imaginaires de $i \ell e^{-i\phi}$

Grâce à un calcul identique à celui qui a été fait au chapitre I, nous pouvons mettre en évidence un système d'axes orthonormés Sx'' , Sy'' liés au couple défini par :

$$\widehat{Ox}, Sx'' = \phi; \text{ affixe de } S \text{ dans } Oxy = (p + iq) e^{i\phi}$$

$$(\text{en posant : } p = \frac{\ell_2}{\beta - r^2} ; q = -\frac{\ell_1}{\beta + r^2})$$

jouissant de la propriété suivante : si Λ et M sont les composantes sur Sx'' , Sy'' de la vitesse de S , la pseudo résultante cinétique a pour affixe dans $Sx''y''$:

$$\rho [(\beta + r^2) \Lambda + i (\beta - r^2) M]$$

la formule (IV.2.2) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{o_1}^t = & - \rho \frac{d}{dt} \Re \{ (-i) [(x_o - iy_o) + (p - iq) e^{-i(\theta + \phi)}] [(\beta + r^2) \Lambda + i (\beta - r^2) M] e^{i(\theta + \phi)} \\ & + [A' (l - im) + \beta' (l + im) + i \ell' \omega] + i(p - iq) [(\beta + r^2) \Lambda + i (\beta - r^2) M] \} \end{aligned}$$

Or d'une part :

$$\Re i (p - iq) [(\beta + r^2) \Lambda + i (\beta - r^2) M] = \Re [-i \ell e^{-i\phi} (\Lambda - iM)] ;$$

d'autre part, en vertu de la formule :

$$\ell - im = (\Lambda - iM) e^{-i\phi} + i\omega (p - iq) e^{-i\phi}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' (\ell - im) + \beta' (\ell + im) + i \ell' \omega &= \mathcal{A}' (\Lambda - iM) e^{-i\phi} + \beta' (\Lambda + iM) e^{i\phi} \\ &+ i [\ell' + \mathcal{A}' (p - iq) e^{-i\phi} - \beta' (p + iq) e^{i\phi}] \omega \end{aligned}$$

Nous pouvons donc prendre comme pseudo moment cinétique du fluide en S :

$$\begin{aligned} \rho R \{ (\mathcal{A}' - i\ell') (\Lambda - iM) e^{-i\phi} + \beta' (\Lambda + iM) e^{i\phi} + i [\ell' + \mathcal{A}' (p - iq) e^{-i\phi} \\ - \beta' (p + iq) e^{i\phi}] \omega \} \end{aligned}$$

Il est facile de montrer en utilisant les expressions de $\mathcal{A}'$, ℓ' , β' , que $\mathcal{A}' - i\ell'$ et $-\beta'$ sont conjugués, donc que le terme en ω subsiste seul. Remplaçant alors $\mathcal{A}'$ par $i\ell' - \bar{\beta}'$, nous obtenons pour pseudo moment cinétique du fluide en S :

$$\rho \ell'' \omega$$

en posant :

$$\ell'' = R [i \ell' - \ell' (p - iq) e^{-i\phi}]$$

où, comme nous l'avons vu, i' est réel.

Les axes Sx'' , Sy'' seront appelés axes principaux du multiplan.

Toujours dans le cas où $\Gamma = \Gamma' = 0$, la force vive du fluide existe et vaut :

$$2T = \iint_{\substack{\text{extérieur} \\ \text{du couple}}} \left(\frac{dG}{dZ} \right) \cdot \left(\frac{\overline{dG}}{dZ} \right) \frac{dx \, dy}{H'_Z \cdot \overline{H}'_Z}$$

En posant au plan (Z) de la couronne circulaire et en utilisant dans ce plan les coordonnées polaires (r, α) , nous obtenons :

$$2T = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2r}}^{\frac{1}{q}} \left(\frac{dG}{dZ} \right) \cdot \left(\frac{dG}{dZ} \right) r dr d\alpha$$

Le calcul fournit, en utilisant les relations entre ℓ , m , Λ , M :

$$2T = \rho \left[(\beta + r^2) \Lambda^2 + (\beta - r^2) M^2 + \ell'' \omega^2 \right]$$

Ceci prouve que $\beta + r^2$, $\beta - r^2$ et ℓ'' sont des quantités positives.

4°) La translation uniforme.

C'est le cas :

$$\omega = 0 ; \quad \ell = \text{constante} ; \quad m = \text{constante}$$

Les formules se simplifient notablement. Nous avons :

$$\begin{cases} X_T + iY_T = i\rho (\Gamma + \Gamma') (\ell + im) \\ M_O^t = \rho (\ell - im)(A\Gamma + A'\Gamma') + i\rho A(\ell - im)^2 \end{cases}$$

Quand les profils présentent chacun une pointe, les conditions de Joukowski montrent que Γ et Γ' sont des formes linéaires en ℓ et m ; X_T , Y_T , M_O^t sont alors des formes quadratiques en ℓ et m . La résultante globale s'annule avec $\Gamma + \Gamma'$, donc, en général, pour une certaine direction de la vitesse de O .

Par suite, lorsque la direction de la vitesse de O varie, l'enveloppe du support de la résultante est une parabole (métacentrique), exceptionnellement un point.

Dans le cas particulier où $\Gamma + \Gamma'$ est nul quels que soient ℓ et m (c'est par exemple, le cas des profils symétriques par rapport à O), le torseur des efforts globaux est équivalent à un couple.

5°) La rotation uniforme.

C'est le cas où ℓ , m , ω sont des constantes ($\omega \neq 0$).

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} X_T + iY_T &= i\rho\Gamma (\ell+im+i\omega A) + i\rho\Gamma' (\ell+im+i\omega A') \\ &\quad - \rho [A i\omega(\ell-im) + B i\omega(\ell+im) - \ell\omega^2] \\ M_O^t &= R\{\rho (\ell-im)(A\Gamma+A'\Gamma') + i\rho (\ell-im) [A(\ell-im) + B(\ell+im) + i\ell\omega]\} \end{aligned} \right.$$

Nous vérifions immédiatement la relation :

$$R(\ell-im) (X_T + iY_T) = -\omega M_O^t$$

Le support de la résultante passe donc par le centre de rotation.

Remarque.

Ce résultat est bien connu dans le cas du profil isolé [Couchet 1] .

Nous pouvons remarquer qu'il s'étend au multiplan. En effet, en utilisant les résultats du chapitre I et en nous plaçant dans le cas de la rotation uniforme, nous avons :

$$X_T + iY_T = \sum_{k=1}^n i\rho \Gamma_k (\ell+im+i\omega A_k) + \omega \left(\ell \frac{\partial T}{\partial m} - i \frac{\partial T}{\partial \ell} \right)$$

$$M_O^t = R \left[\rho (\ell-im) \sum_{k=1}^n \Gamma_k A_k \right] + m \frac{\partial T}{\partial \ell} - \ell \frac{\partial T}{\partial m}$$

et la relation $R(\ell-im)(X_T + iY_T) = -\omega M_O^t$ est évidente.

Considérons maintenant le cas des profils à pointe.

Les conditions de Joukowski s'écrivent :

$$\Gamma = U\ell + Vm + W\omega$$

$$\Gamma' = U'\ell + V'm + W'\omega$$

où les coefficients U, V, W, U', V', W' , qu'il est inutile de préciser pour la suite, ne dépendent que de la géométrie du couple de profils.

Introduisant les coordonnées du centre de rotation :

$$\alpha = -\frac{m}{\omega} \quad ; \quad \beta = \frac{\ell}{\omega} \quad ,$$

nous obtenons :

$$\Gamma = (U\beta - V\alpha + W) \omega$$

$$\Gamma' = (U'\beta - V'\alpha + W')\omega$$

Posons, avec des notations évidentes :

$$A = A_r + i A_i \quad ; \quad A' = A'_r + i A'_i$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_r + i \mathcal{A}_i \quad ; \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_r + i \mathcal{C}_i$$

Il vient finalement :

$$X_T = \rho\omega^2 [(U\beta - V\alpha + W)(\alpha - A_r) + (U'\beta - V'\alpha + W')(\alpha - A'_r) + (\mathcal{A}_r\alpha + \mathcal{A}_i\beta) - \beta\alpha + \mathcal{C}_r]$$

$$Y_T = \rho\omega^2 [(U\beta - V\alpha + W)(\beta - A_i) + (U'\beta - V'\alpha + W')(\beta - A'_i) + (\mathcal{A}_i\alpha - \mathcal{A}_r\beta) - \beta\beta + \mathcal{C}_i]$$

Nous pouvons donc écrire :

$$X_T + iY_T = \rho\omega^2 (\mathcal{X} + i\mathcal{Y})$$

où $\mathcal{X} = 0$ et $\mathcal{Y} = 0$ sont les équations de deux hyperboles ne dépendant que de la géométrie du couple et ayant une direction asymptotique commune parallèle au vecteur de composantes $(U+U', V+V')$.

Il y a donc quatre centres de rotation pour lesquels la résultante globale est nulle ; ce sont les points d'intersection des deux hyperboles. Le point à l'infini correspond à une translation à

circulation totale $\Gamma + \Gamma'$ nulle et le torseur des efforts globaux est équivalent à un couple ; pour les trois autres points, qui sont, en général, à distance finie, M_O^t est nul et le torseur des efforts globaux est équivalent à zéro.

Le support de la résultante globale a pour équation :

$$(x - \alpha) \mathcal{Y} - (y - \beta) \mathcal{X} = 0 .$$

A un centre de rotation (α, β) donné correspond donc un support et un seul.

Inversement, donnons nous le support d'équation.

$$ux + vy + w = 0$$

Les coordonnées du centre de rotation correspondant doivent vérifier :

$$\begin{cases} u\alpha + v\beta + w = 0 \\ u\mathcal{X} + v\mathcal{Y} = 0 \end{cases}$$

En tenant compte de la première équation, nous pouvons écrire la seconde sous la forme :

$$u \times \text{forme linéaire en } \alpha, \beta + v \times \text{forme linéaire en } \alpha, \beta + w [(V+V')\alpha - (U+U')\beta] + \text{Cte} = 0$$

α et β sont donc déterminés par un système d'équations linéaires.

Comme pour un profil isolé [Couchet 1] , la correspondance entre le centre de rotation et le support de la résultante globale est biunivoque.

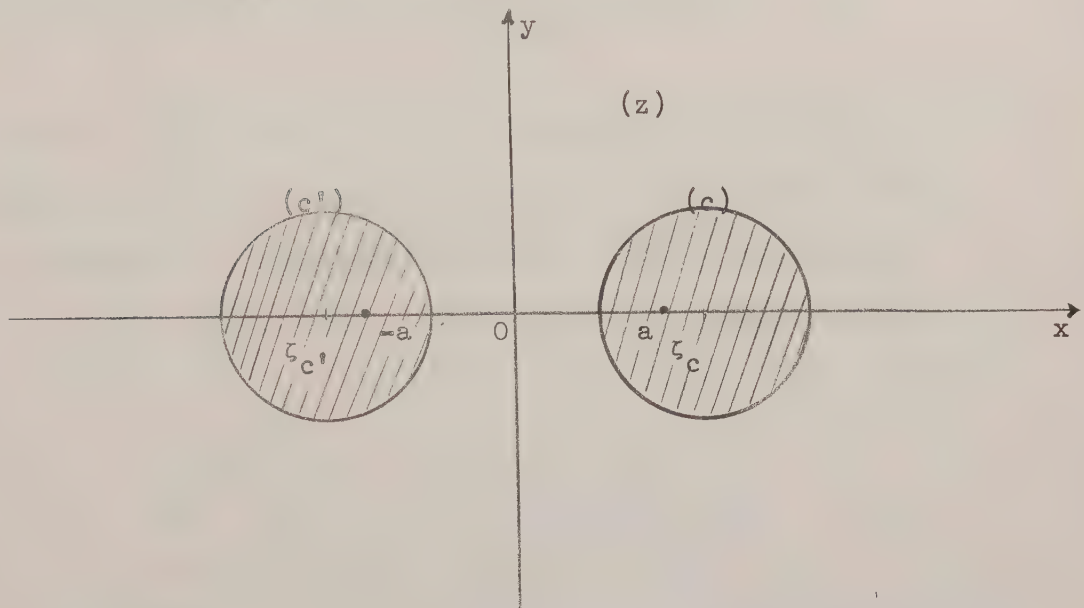
Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers.

6°) Les profils sont deux cercles égaux.

Nous considérerons ces cercles comme des cercles du faisceau dont les points-limite ont pour coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$

[a constante donnée positive] ; (c) est l'ensemble des points tels que $\left| \frac{z-a}{z+a} \right| = q$, (c') l'ensemble des points tels que

$$\left| \frac{z-a}{z+a} \right| = \frac{1}{q} \quad [\text{fig 18}]$$



[Fig. 18]

La fonction effectuant la représentation conforme est :

$$z = H(Z) = -a \frac{Z+1}{Z-1}$$

de sorte que :

$$Z = \frac{z-a}{z+a}$$

Nous avons facilement :

$$\alpha = \alpha' = \frac{4\pi a^2 q^2}{(1-q^2)^2} \quad ; \quad \zeta_c = -\zeta_{c'} = a \frac{1+q^2}{1-q^2}$$

Le potentiel complexe sans circulations $G(Z)$ s'obtient : soit en calculant les coefficients ; on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = a \\ \alpha_n = 2a \quad ; \quad \alpha_{-n} = 0 \\ \alpha'_n = 2a^2 \frac{1+q^2}{1-q^2} \quad ; \quad \alpha'_{-n} = 2a^2 \frac{1+q^2}{1-q^2} q^{2n} \end{array} \right\} \quad (n \text{ entier } \geq 1)$$

(il est inutile de calculer les β_n et les β'_n , puisque les profils sont symétriques par rapport à l'origine) ; soit en opérant directement puisque la fonction $H(Z)$ est très simple ; la méthode des résidus donne les intégrales I_n et J_n (Voir chapitre III) :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_n = 2\pi a q^n (-m + i\ell + a \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} \omega) \\ J_n = 2\pi a q^n (m + i\ell + a \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} \omega) \end{array} \right.$$

Nous avons donc :

$$G(Z) = \ell G_1(Z) + m G_2(Z) + \omega G_3(Z)$$

en posant :

$$G_1(Z) = 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{q^{2n} + 1} (Z^n - \frac{1}{Z^n})$$

$$G_2(Z) = -2ia \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{q^{2n} - 1} (Z^n - \frac{1}{Z^n})$$

$$G_3(Z) = 2ia^2 \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{q^{2n} + 1} (Z^n + \frac{1}{Z^n})$$

Quand il y a des circulations Γ et Γ' autour de (c) et (c') , il faut ajouter à $G(Z)$:

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z + \frac{i(\Gamma + \Gamma')}{2\pi} \left[\log(Z-1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{2n}}{q^{2n} + 1} \cdot \frac{1}{n} \left(Z^n + \frac{1}{Z^n} \right) \right]$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} X_T + iY_T &= i\rho\Gamma (\ell + im + i\omega a) + i\rho\Gamma' (\ell + im - i\omega a) \\ &+ 8\pi\rho a^2 \left[\frac{q^2}{(1 - q^2)^2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \right] [\ell' + im' + i\omega(\ell + im)] \\ &- 16\pi\rho a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} [\ell' - im' + i\omega(\ell - im)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{O'}^t &= -\rho a (\Gamma' - \Gamma)\ell + 32\pi\rho a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} \cdot \ell \cdot m \\ &+ 8\pi\rho a^4 \left(\frac{1 + q^2}{1 - q^2} \right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n (1 - q^{2n})^2}{q^{2n} - q^{-2n}} \cdot \omega' \end{aligned}$$

Les axes principaux sont évidemment les axes de symétrie Ox et Oy .

La pseudo résultante cinétique a pour composantes :

$$\begin{aligned} &8\pi\rho a^2 \left[2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{2n}}{q^{2n} + 1} - \frac{q^2}{(1 - q^2)^2} \right] \ell \\ &- 8\pi\rho a^2 \left[2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n q^{2n}}{q^{2n} - 1} + \frac{q^2}{(1 - q^2)^2} \right] m \end{aligned}$$

tandis que le pseudo moment cinétique en O est :

$$- 8\pi\rho a^4 \left(\frac{1 + q^2}{1 - q^2} \right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n (1 - q^{2n})^2}{q^{2n} - q^{-2n}} \cdot \omega$$

Quand il y a des circulations autour des cercles, il faut ajouter les forces de Joukowski relatives aux points-limite.

7°) Les profils sont symétriques par rapport à l'origine.

Dans ce cas :

$$Z_1 = 1 \quad ; \quad Z_0 = -1$$

$$\beta_n = -\alpha_{-n} \quad ; \quad \beta'_n = \alpha'_{-n} \quad (n \text{ entier quelconque})$$

Nous avons :

$$\begin{cases} A = K'(1) - K(1) \\ A' = K'(1) \end{cases}$$

Or :

$$K(1) = -(\alpha_0 - \beta_0) = -2\alpha_0$$

En outre, puisque, dans ce cas, $a_n = a_{-n}$:

$$K(Z) = (Z+1) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(Z^n + \frac{1}{Z^n} \right)$$

de sorte que :

$$K'(1) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{K(1)}{2} = -\alpha_0$$

D'où :

$$\begin{cases} A = \alpha_0 \\ A' = -\alpha_0 \end{cases}$$

Nous obtenons facilement :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 8\pi\alpha_0 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha_n q^{2n} + \alpha_{-n} q^{-2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} \\ B = -16\pi\alpha_0 \bar{\alpha}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} - 2a \quad (\text{réel}) \\ C = 0 \\ A' = 0 \\ B' = 0 \\ C' = 2\pi i \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(\alpha'_n - \alpha'_{-n})(\bar{\alpha}'_n - \bar{\alpha}'_{-n})}{2n - 2n} \quad (\text{imaginaire pur}) \end{array} \right.$$

D'où la résultante globale et le moment en 0 global :

$$X_T + iY_T = i\rho\Gamma (\ell + im + i\omega\alpha_0) + i\rho\Gamma' (\ell + im - i\omega\alpha_0)$$

$$= \rho \{ 8\pi\alpha_0 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha_n q^{2n} + \alpha_{-n} q^{-2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} [\ell' - im' + i\omega(\ell - im)] \\ - [16\pi\alpha_0 \bar{\alpha}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} + 2a] [\ell' + im' + i\omega(\ell + im)] \}$$

$$M_0^t = \rho R [(\ell - im) \alpha_0 (\Gamma - \Gamma') + 8\pi i \alpha_0 (\ell - im)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha_n q^{2n} + \alpha_{-n} q^{-2n}}{q^{2n} - q^{-2n}}] \\ + 2\pi\rho\omega' \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n (\alpha_n' - \alpha_{-n}') (\bar{\alpha}_n' - \bar{\alpha}_{-n}')}{q^{2n} - q^{-2n}}$$

Les axes principaux se déterminent immédiatement. S est confondu avec le point 0 et :

$$\widehat{Ox}, Sx'' = \phi = \frac{1}{2} \text{ argument } \left[\alpha_0 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha_n q^{2n} + \alpha_{-n} q^{-2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} \right]$$

La pseudo résultante cinétique a pour composantes en axes Sx'' , Sy'' :

$$\rho \{ -16\pi\alpha_0 \bar{\alpha}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} - 2a + |8\pi\alpha_0 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha_n q^{2n} + \alpha_{-n} q^{-2n}}{q^{2n} - q^{-2n}}| \} \Lambda$$

$$\rho \{ -16\pi\alpha_0 \bar{\alpha}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} - 2a - |8\pi\alpha_0 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha_n q^{2n} + \alpha_{-n} q^{-2n}}{q^{2n} - q^{-2n}}| \} M$$

tandis que le pseudo moment cinétique en 0 est :

$$- 2\pi\rho \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(\alpha'_n - \alpha'_{-n}) (\bar{\alpha}'_n - \bar{\alpha}'_{-n})}{q^{2n} - q^{-2n}} \cdot \omega$$

Quand les profils présentent chacun une pointe, les conditions de Joukowsky s'écrivent (Voir chapitre III) :

$$\begin{cases} \Gamma - \Gamma' = L \ell + M m \\ \Gamma + \Gamma' = \Omega \omega \end{cases}$$

Dans le cas de la translation uniforme, les circulations sont opposées et quelle que soit la vitesse de O , le torseur des efforts globaux est équivalent à un couple. Si le point O est fixe, les circulations sont égales et le torseur des efforts globaux est équivalent à zéro.

8°) Les profils sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Dans ce cas :

$$Z_1 = 1 \quad ; \quad Z_0 = e^{is_0}$$

$$\beta_n = \bar{\alpha}_{-n} \quad ; \quad \beta'_n = \bar{\alpha}'_{-n} \quad (n \text{ entier quelconque})$$

Nous avons :

$$\begin{cases} A = K' (1) - K (1) \\ A' = K' (1) \end{cases}$$

Or :

$$K (1) = - (\alpha_0 - \beta_0) = - (\alpha_0 - \bar{\alpha}_0) \quad \text{imaginaire pur.}$$

En outre, dans ce cas, $a_{-n} = \bar{a}_n e^{-is_0}$ et par suite :

$$K (Z) = (Z - e^{is_0}) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \bar{a}_n e^{-is_0} Z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n \right]$$

ce qui donne aisément :

$$K'(1) = \frac{K(1)}{1 - e^{\frac{is_0}{2}}} - 2i \sin \frac{s_0}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n (a_n e^{\frac{is_0}{2}} - \bar{a}_n e^{-\frac{is_0}{2}})$$

où le second terme du second membre est réel.

Finalement :

$$A = - 2i \sin \frac{s_0}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n (a_n e^{\frac{is_0}{2}} - \bar{a}_n e^{-\frac{is_0}{2}}) - \frac{(a_0 - \bar{a}_0) e^{\frac{is_0}{2}}}{1 - e^{\frac{is_0}{2}}}$$

et :

$$A' = \bar{A}$$

Nous obtenons finalement :

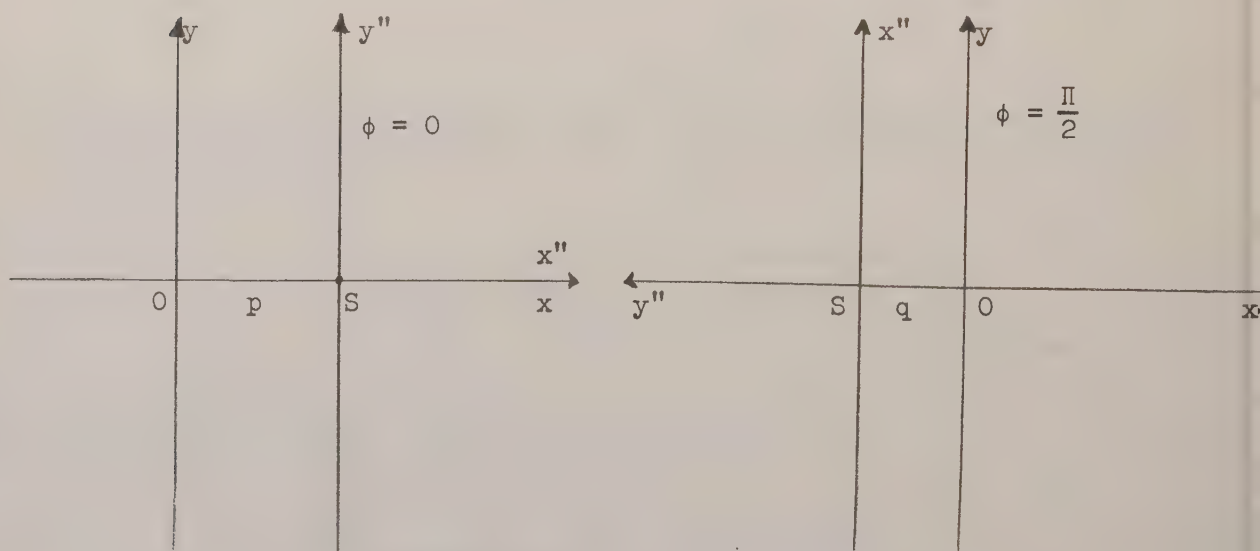
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = 2\pi (\alpha_0 - \bar{\alpha}_0) \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(\alpha_n - \bar{\alpha}_n) q^{2n} + (\alpha_{-n} - \bar{\alpha}_{-n}) q^{-2n}}{q^{2n} - q^{-2n}} \\ \beta = 4\pi (\alpha_0 - \bar{\alpha}_0)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} - 2\alpha \\ \mathcal{C} = 2\pi (\alpha_0 - \bar{\alpha}_0) \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(\alpha'_n - \bar{\alpha}'_n) + (\alpha'_{-n} - \bar{\alpha}'_{-n})}{q^{2n} - q^{-2n}} - \alpha(\zeta_c + \bar{\zeta}_c) \end{array} \right.$$

(ces trois coefficients sont évidemment réels).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}' = \pi i \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(\alpha_n q^{2n} - \bar{\alpha}_{-n} q^{-2n})(\bar{\alpha}'_n - \alpha'_n) + (\bar{\alpha}_n q^{2n} - \alpha_{-n} q^{-2n})(\alpha'_n - \bar{\alpha}'_{-n})}{q^{2n} - q^{-2n}} \\ \beta' = - \pi i (\alpha_0 - \bar{\alpha}_0) \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(\alpha'_n - \bar{\alpha}'_n) + (\alpha'_{-n} - \bar{\alpha}'_{-n})}{q^{2n} - q^{-2n}} \\ \mathcal{C}' = 2\pi i \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(\alpha'_n - \bar{\alpha}'_{-n})(\bar{\alpha}'_n - \alpha'_{-n})}{q^{2n} - q^{-2n}} \end{array} \right.$$

(Ces coefficients sont évidemment imaginaires purs).

Nous constatons que ces résultats sont beaucoup moins simples que ceux du paragraphe 7 du présent chapitre ; aussi n'écrirons nous pas les formules donnant résultante et moment globaux dans ce cas. Signalons seulement que l'origine S des axes principaux est évidemment sur l'axe de symétrie et que ces axes sont parallèles aux axes Ox , Oy . D'ailleurs, $\mathcal{A}$ étant réel, $\phi = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ suivant que $\mathcal{A}$ est positif ou négatif. Pour $\phi = 0$, puisque $\mathcal{C}$ est réel, $\mathcal{C}_1$ est nul, donc $q = 0$; pour $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{C}_2 = 0$, donc $p = 0$ [Fig 19] .



[Fig 19]

Quand les profils présentent chacun une pointe, les conditions de Joukowski s'écrivent :

$$\begin{cases} \Gamma - \Gamma' = L \ell \\ \Gamma + \Gamma' = M m + \Omega \omega \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que dans le cas d'une translation

uniforme parallèle à l'axe de symétrie (m, w nuls), les circulations sont opposées et le torseur des efforts globaux est équivalent à zéro.

Considérons le cas, envisagé au chapitre III, où le coefficient L est identiquement nul. Les circulations sont alors égales et les formules (IV.1.1) et (IV.2.1), par exemple, montrent qu'on peut remplacer les deux forces de Joukowski par une seule force de Joukowski appliquée au point d'affixe $\frac{A + \bar{A}}{2}$ de l'axe réel avec la circulation 2Γ .

Le couple se comporte alors cinématiquement et dynamiquement comme un profil à pointe isolé, admettant Ox comme axe de symétrie et le point d'affixe $\frac{A + \bar{A}}{2}$ comme centre, la circulation autour du profil étant 2Γ .

9°) Le cas du biplan droit.

Déterminons tout d'abord les divers coefficients.

Nous avons :

$$A = K'(1) - K(1)$$

$$A' = K'(1)$$

Ici :

$$K(Z) = h(Z-1) \left[\zeta(i \log Z) - \frac{\eta_1 i}{\pi} \log Z \right]$$

ce qui donne, en posant $Z = e^{-iu}$:

$$K(1) = h \lim_{u \rightarrow 0} (e^{-iu} - 1) \zeta(u) = -ih$$

$$K'(1) = h \lim_{u \rightarrow 0} [\zeta(u) + i(e^{iu} - 1)p(u)] = -\frac{ih}{2}$$

D'où :

$$A = -A' = \frac{ih}{2}$$

En tenant compte des expressions de α_n et de α'_n (Voir chapitre II), nous obtenons aisément :

$$A = -B = 4\pi h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} ; \quad C = 0$$

$$A' = B' = 0 ; \quad C' = 2\pi i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n (\alpha'_n - \alpha'_{-n})^2}{q^{2n} - q^{-2n}}$$

Les conditions de Joukowski s'écrivent :

$$\Gamma = \Gamma' ; \quad \Gamma + \Gamma' = M m + \Omega \omega$$

avec :

$$M = - \frac{8\pi h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^n + q^{-n}} \sin n s_1}{1 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n s_1}{q^n + q^{-n}}}$$

$$\Omega = \frac{4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n (\alpha'_n - \alpha'_{-n})}{q^n + q^{-n}} \cos n s_1}{1 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n s_1}{q^n + q^{-n}}}$$

Nous obtenons pour le torseur des efforts globaux :

$$X_T + iY_T = 2i\rho\Gamma (\ell + im) + 8\pi\rho h^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \right) (-\omega m + im')$$

$$\mathcal{M}_O^t = 8\pi\rho h^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \right) \ell m + 2\pi\rho \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n (\alpha'_n - \alpha'_{-n})^2}{q^{2n} - q^{-2n}} \right) \omega'$$

Dans le cas de la translation ($\omega = 0$), m doit rester constant.

Nous avons :

$$X_T = -\rho M m^2 ; \quad Y_T = \rho M \ell m ; \quad \mathcal{M}_O^t = 8\pi\rho h^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \right) \ell m$$

et nous vérifions aisément que le support de la résultante globale passe par le point de coordonnées

$$x = -h \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \cdot \left[1 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n s_1}{q^n + q^{-n}} \right]}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^n + q^{-n}} \sin n s_1} ; \quad y = 0$$

Dans le cas plus général où m et ω sont constants (ce cas contient celui de la rotation uniforme), nous avons :

$$X_T + iY_T = i\rho (Mm + \Omega\omega) (l + im) - 8\pi\rho h^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \right) m \omega$$

$$M_O^t = 8\pi\rho h^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^{2n} - q^{-2n}} \right) l m$$

Il est alors facile de vérifier que le support de la résultante passe par le centre instantané de rotation.

10°) Le calcul des efforts aérodynamiques s'exerçant sur un profil.

Ce calcul peut s'effectuer en utilisant les formules, rappelées au début du présent chapitre, qui donnent la résultante et le moment des efforts aérodynamiques qui s'exercent sur un profil. Les fonctions à intégrer doivent être développées en séries de puissances de Z sur les cercles limitant la couronne. Le calcul est très long et ne semble pas donner lieu à une interprétation intéressante. Nous noterons cependant que résultante et moment en O se mettent sous la forme d'une somme de deux termes : une forme quadratique en Γ , Γ' , l , m , ω et une forme linéaire en $\frac{d\Gamma}{dt}$, $\frac{dm}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, les coefficients de ces formes ne dépendant que de la géométrie du couple de profils.

CHAPITRE V

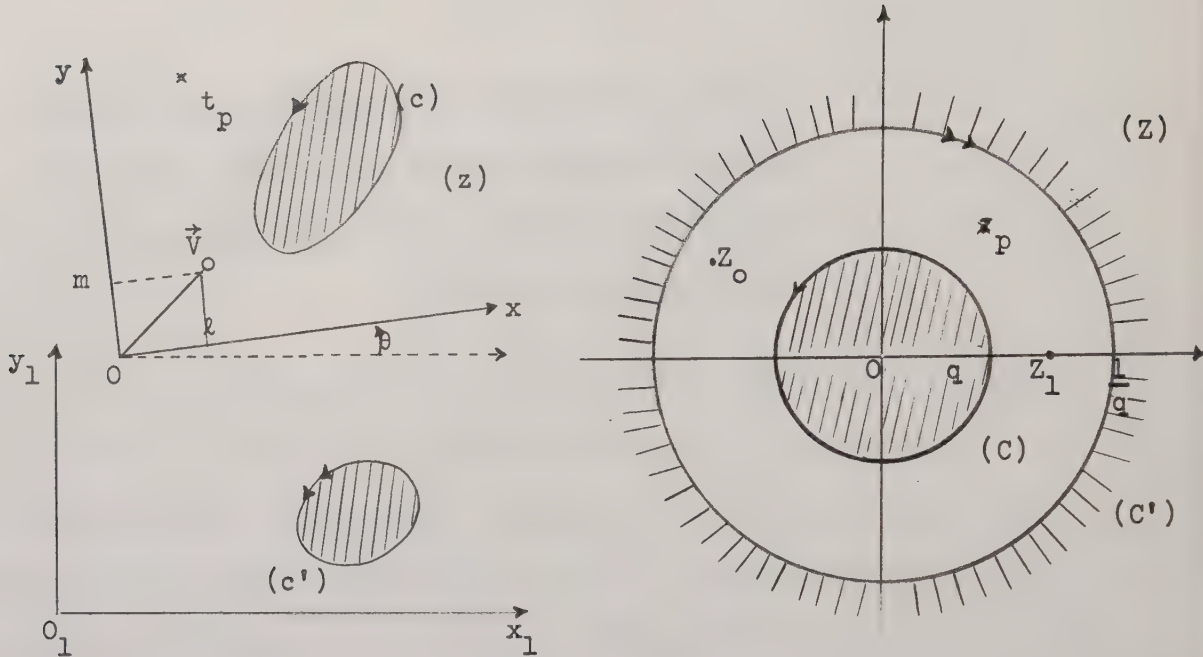
Le calcul des efforts aérodynamiques s'exerçant sur un couple de profils sans pointe animé d'un mouvement arbitraire en présence d'un nombre fini de tourbillons libres.

Nous allons montrer dans ce chapitre que les résultats antérieurs, et notamment la théorie des images par rapport à une couronne circulaire, permettent d'obtenir le potentiel complexe. Nous en déduirons le torseur des efforts aérodynamiques s'exerçant sur le couple des profils. Enfin, nous examinerons le même problème lorsque le couple de profils est remplacé par un multiplan.

1°) Le potentiel complexe.

Nous considérons un couple de profils sans pointe (c), (c') animé d'un mouvement quelconque caractérisé par les composantes $l(t)$, $m(t)$ sur des axes orthonormés Ox , Oy liés au couple de la vitesse de O et par la rotation instantanée $\omega(t)$ dans un fluide parfait incompressible au repos à l'infini en présence de N tourbillons libres d'affixes t_p , d'intensités Γ_p ($p = 1, 2, \dots, N$).

Nous désignons par τ_p l'affixe de l'homologue de t_p dans le plan (Z) de la couronne circulaire transformée de l'extérieur du couple [fig. 20] .



[Fig. 20]

Déterminons tout d'abord le potentiel complexe.

Pour le tourbillon d'affixe t_p , d'intensité Γ_p , la théorie des images fournit : (formule III.4.1)

$$-\frac{i\Gamma_p}{2\pi} \left[\log (Z - \tau_p) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_{p,n}}{n} Z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_{p,-n}}{n} Z^{-n} \right]$$

si nous posons :

$$T_{p,n} = \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} (\bar{\tau}_p^n - \tau_p^{-n} q^{2n})$$

$$T_{p,-n} = \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} (\bar{\tau}_p^{-n} - \tau_p^n q^{2n})$$

Ce potentiel n'introduit aucune circulation autour de (c), mais introduit la circulation $-\Gamma_p$ autour de (c').

Par suite le potentiel cherché, avec circulations Γ et Γ' autour de (c) et (c') respectivement, peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 (V.1.1) \quad F(Z) = G(Z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z \\
 + \frac{i(\Gamma + \Gamma' + \sum_{p=1}^N \Gamma_p)}{2\pi} [\log(Z - Z_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} (Z_1^{-n} - q^{2n} Z_1^n) Z^{-n} \\
 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{4n}} (Z_1^n - q^{2n} Z_1^{-n}) Z^n] \\
 - \sum_{p=1}^N \frac{i\Gamma_p}{2\pi} [\log(Z - \tau_p) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_{p,n}}{n} Z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_{p,-n}}{n} Z^{-n}] .
 \end{aligned}$$

(Le coefficient $\sum_{p=1}^N \Gamma_p$ ajouté à Γ' introduit la circulation correspondante autour de (c')).

On vérifie immédiatement que la vitesse fluide à l'infini est nulle.

2°) La condition de liberté des tourbillons.

Nous savons que l'introduction d'un tourbillon dans un fluide est, en général, incompatible avec l'absence de forces extérieures. Quand ces dernières sont nulles, le tourbillon est dit libre.

La condition de liberté du tourbillon d'affixe t_p et d'intensité Γ_p s'écrit : [Couchet 1]

$$\frac{d\bar{t}_p}{dt} + 2 - i\omega \bar{t}_p = \lim_{z=t_p} \left[\frac{dF}{dz} + \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \frac{1}{z - t_p} \right]$$

Si nous posons :

$$F(Z) = P_p(Z) - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \log(Z - \tau_p)$$

nous obtenons

$$\frac{d\bar{t}}{dt}_p + \ell - im - i\omega\bar{t}_p = \lim_{Z=\tau_p} \left[\frac{P'_p(Z)}{H'_p(Z)} + \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \left(\frac{1}{H(Z) - H(\tau_p)} - \frac{1}{H'(Z)(Z - \tau_p)} \right) \right]$$

et finalement, après un calcul facile :

$$\frac{dt}{dt}_p + \ell + im + i\omega t_p = \left[\frac{P'_p(Z)}{H'_p(Z)} + \frac{i\Gamma_p}{4\pi} \frac{H''(Z)}{H'^2(Z)} \right]_{Z=\tau_p}$$

Nous avons calculé les efforts globaux exercés par le fluide sur le couple de profils lorsque les tourbillons n'existent pas et lorsque les circulations autour de (c) et (c') sont respectivement Γ et $\Gamma' + \sum_{p=1}^N \Gamma_p$.

Dans ce qui suit, nous allons seulement calculer les termes qui doivent être ajoutés aux résultats ainsi obtenus.

3°) La résultante globale.

En axes Oxy liés au couple de profils, les composantes X_T , Y_T de la résultante globale sont données par la formule rappelée au début du paragraphe 1, du chapitre IV.

Calculons les termes supplémentaires dans :

$$\underline{i\rho(\ell - im) \int_{C'-C} \frac{dF}{dZ} dZ}.$$

Nous obtenons :

$$i\rho (l-im) \times 2\pi i \times \sum_{p=1}^N -\frac{i\Gamma_p}{2\pi} = i\rho (l-im) \sum_{p=1}^N \Gamma_p .$$

$$\rho \omega \int_{C'-C''} z \frac{dF}{dZ} dZ .$$

Nous devons ajouter dans l'intégrale $\int_{C'-C''} z \frac{dF}{dZ} dZ :$

$$\int_{C'-C''} \frac{K(Z)}{Z-Z_1} \left\{ - \sum_{p=1}^N \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \left[\frac{1}{Z-\tau_p} + \frac{1}{Z} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} T_{p,n} Z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} T_{p,-n} Z^{-n} \right) \right] \right\}$$

Le théorème des résidus donne le terme supplémentaire cherché :

$$\rho \omega \sum_{p=1}^N \Gamma_p \left\{ H(\tau_p) + \frac{K(Z_1)}{Z_1 - \tau_p} + \frac{K(Z_1)}{Z_1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} T_{p,n} Z_1^n - \sum_{n=1}^{+\infty} T_{p,-n} Z_1^{-n} \right] \right\} \\ - i\rho \int_{C'-C''} \frac{\partial F}{\partial t} H'(Z) dZ .$$

Nous devons ajouter dans l'intégrale $\int_{C'-C''} \frac{\partial F}{\partial t} H'(Z) dZ :$

$$- \sum_{p=1}^N \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \int_{C'-C''} H'(Z) \left[-\frac{\tau'_p}{Z-\tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (T'_{p,n} Z^n + T'_{p,-n} Z^{-n}) \right] dZ$$

où $\tau'_p, T'_{p,n}, T'_{p,-n}$ sont les dérivées de $\tau_p, T_{p,n}, T_{p,-n}$

par rapport au temps.

Remplaçons $H'(Z)$ par :

$$\frac{K'(Z)}{Z - Z_1} - \frac{K(Z)}{(Z - Z_1)^2}$$

Le théorème des résidus donne :

pour l'intégrale :

$$\int_{C'-C} \frac{K'(Z)}{Z - Z_1} \left[-\frac{\tau'_p}{Z - \tau'_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (T'_{p,n} Z^n + T'_{p,-n} Z^{-n}) \right] dZ$$

$$2\pi i \left[-\tau'_p \left(\frac{K'(Z_1)}{Z_1 - \tau'_p} + \frac{K'(\tau'_p)}{\tau'_p - Z_1} \right) + K'(Z_1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (T'_{p,n} Z_1^n + T'_{p,-n} Z_1^{-n}) \right]$$

et pour l'intégrale :

$$\int_{C'-C} \frac{H(Z)}{(Z - Z_1)^2} \left[-\frac{\tau'_p}{Z - \tau'_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (T'_{p,n} Z^n + T'_{p,-n} Z^{-n}) \right] dZ$$

$$2\pi i \left\{ -\frac{\tau'_p K(\tau'_p)}{(\tau'_p - Z_1)^2} + \frac{d}{dZ} \left[K(Z) \left(-\frac{\tau'_p}{Z - \tau'_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (T'_{p,n} Z^n + T'_{p,-n} Z^{-n}) \right) \right] \right\}_{Z=Z_1}$$

Après des simplifications évidentes, nous avons comme terme supplémentaire :

$$i\rho \sum_{p=1}^N \Gamma_p \left\{ \tau'_p \left[H'_Z(\tau'_p) + \frac{K(Z_1)}{(Z_1 - \tau'_p)^2} \right] + -\frac{K(Z_1)}{Z_1} \sum_{n=1}^{+\infty} (T'_{p,n} Z_1^n - T'_{p,-n} Z_1^{-n}) \right\}$$

$$- \frac{i\rho}{2} \int_{C'-C} \left(\frac{dF}{dZ} \right)^2 \frac{1}{H'(Z)} dZ .$$

Nous savons que $H'(Z)$ n'a pas de zéro dans la couronne circulaire, mais y admet le pôle double $Z = Z_1$. La présence de $\frac{1}{H'(Z)}$ sous le signe somme ne fait donc apparaître aucun pôle nouveau, mais fait disparaître le pôle double $Z = Z_1$ de $\left(\frac{dF}{dZ}\right)^2$. La fonction $\left(\frac{dF}{dZ}\right)^2 \cdot \frac{1}{H'(Z)}$ a donc dans la couronne N pôles doubles $Z = \tau_p$.

Si R_{τ_p} est le résidu correspondant au pôle τ_p , la valeur de l'intégrale est :

$$\Pi p \sum_{p=1}^N R_{\tau_p}.$$

Utilisant les notions du paragraphe 2 du présent chapitre, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} R_{\tau_p} &= \frac{d}{dZ} \left[\left(\frac{dP}{dZ} - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \frac{1}{Z - \tau_p} \right)^2 \cdot \frac{1}{H'(Z)} \cdot (Z - \tau_p)^2 \right]_{Z=\tau_p} \\ &= \frac{d}{dZ} \left\{ \left[(Z - \tau_p) \frac{dP}{dZ} - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \right]^2 \frac{1}{H'(Z)} \right\}_{Z=\tau_p} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$R_{\tau_p} = - \frac{i\Gamma_p}{\pi} \left[\frac{\frac{dP}{dZ}(\tau_p)}{H'(\tau_p)} + \frac{i\Gamma_p}{4\pi} \frac{H''(\tau_p)}{H'^2(\tau_p)} \right]$$

donc, en tenant compte de la condition de liberté des tourbillons :

$$R_{\tau_p} = - \frac{i\Gamma_p}{\pi} \overline{\left[\frac{dt}{dt} p + l + im + i\omega t_p \right]}$$

Notre intégrale vaut donc :

$$- i\rho \sum_{p=1}^N r_p \left(\frac{u_p}{dt} + \ell + im + i\omega t_p \right)$$

Les termes supplémentaires cherchés s'obtiennent en ajoutant les résultats précédents ; il y a quelques simplifications quand on remarque que :

$$t_p = H(\tau_p) \quad ; \quad \frac{dt_p}{dt} = H'_Z(\tau_p) \cdot \tau'_p$$

Finalement, les termes à ajouter dans $X_T + iY_T$ sont :

$$(V.3.1) \quad - i\rho K(Z_1) \sum_{p=1}^N r_p \left\{ \left[\frac{\tau'_p}{(Z_1 - \tau_p)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (T'_{p,n} Z_1^{n-1} - T'_{p,-n} Z_1^{-n-1}) \right] \right. \\ \left. + i\omega \left[\frac{1}{Z_1 - \tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} (T_{p,n} Z_1^{n-1} - T_{p,-n} Z_1^{-n-1}) \right] \right\}$$

Si nous utilisons les axes fixes $O_1 x_1 y_1$, nous voyons que les termes à ajouter dans $(X_1 + iY_1)_T$ se mettent sous la forme d'une dérivée par rapport au temps :

$$(V.3.2) \quad - i\rho K(Z_1) \frac{d}{dt} \left[e^{i\theta} \cdot \sum_{p=1}^N r_p \left(\frac{1}{Z_1 - \tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} (T_{p,n} Z_1^{n-1} - T_{p,-n} Z_1^{-n-1}) \right) \right]$$

4°) Le moment global.

Le moment global au point O , origine des axes liés au couple de profils, est donné par une formule rappelée au début du paragraphe 2, du chapitre IV.

Nous allons calculer les termes supplémentaires dans les intégrales suivantes (dont nous devons prendre les parties réelles) :

$$\frac{\rho}{2} \int_{C'-C} \frac{H(Z)}{H'(Z)} \left(\frac{dF}{dZ} \right)^2 dZ .$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{H(Z)}{H'(Z)} = \frac{(Z-Z_1) \cdot K(Z)}{\text{fonction holomorphe sans zéro}}$$

de sorte que la fonction à intégrer admet dans la couronne circulaire :

Z_1 comme pôle simple

les $Z = \tau_p$ comme pôles doubles

Comme dans le calcul effectué au chapitre IV, le résidu relatif au pôle $Z = Z_1$ est réel et fournit une contribution nulle dans la partie réelle de l'intégrale.

Reste à calculer les résidus R_{τ_p} relatifs aux pôles doubles τ_p .

Nous avons :

$$\begin{aligned} R_{\tau_p} &= \frac{d}{dZ} \left\{ \left[\frac{dP}{dZ} (Z - \tau_p) - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \right]^2 \cdot \frac{H(Z)}{H'(Z)} \right\}_{Z=\tau_p} \\ &= -\frac{\Gamma_p^2}{4\pi^2} - \frac{i\Gamma_p}{\pi} H(\tau_p) \left[\frac{\frac{dP(\tau_p)}{dZ}}{H'(\tau_p)} + \frac{i\Gamma_p}{4\pi} \frac{H''(\tau_p)}{H'^2(\tau_p)} \right] \end{aligned}$$

Les termes $-\frac{\Gamma_p^2}{4\pi^2}$ donnent des contributions nulles dans la partie réelle de l'intégrale. Reste donc, en utilisant la condition de liberté des tourbillons :

$$\Re \left[\sum_{p=1}^N r_p t_p \left(\frac{dt}{dt} + \ell + im + i\omega t_p \right) \right]$$

$$- \rho (\ell - im) \int_{C' - C} z \frac{dF}{dZ} dZ .$$

L'intégrale a été calculée dans le paragraphe précédent. Le terme supplémentaire correspondant est donc :

$$\Re \left\{ - \rho (\ell - im) \left[\sum_{p=1}^N r_p (t_p + K(Z_1)) \left[\frac{1}{Z_1 - \tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} T_{p,n} Z_1^{n-1} - T_{p,-n} Z_1^{-n-1} \right] \right] \right\}$$

$$\frac{\rho}{2} \int_{C' - C} \frac{\partial F}{\partial t} d(z\bar{z})$$

Le terme à ajouter dans $\frac{\partial F}{\partial t}$ est :

$$- \sum_{p=1}^N \frac{i r_p}{2\pi} \left[- \frac{\tau'_p}{Z - \tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (T'_{p,n} Z^n + T'_{p,-n} Z^{-n}) \right]$$

Ecrivons notre intégrale sous la forme :

$$\frac{\rho}{2} \int_{C'} \frac{\partial F}{\partial t} d(z\bar{z}) - \frac{\rho}{2} \int_C \frac{\partial F}{\partial t} d(z\bar{z})$$

sur (C') :

$$d(z\bar{z}) = \frac{1}{Z} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} -n\beta'_{-n} Z^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\beta'_n Z^n \right] dZ$$

$$\frac{1}{Z - \tau_p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_p^{n-1}}{Z^n}$$

Le terme supplémentaire fourni par la première des deux intégrales est donc :

$$- \sum_{p=1}^N \Gamma_p \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} [\beta'_n (n \tau'_p \tau_p^{n-1} - T'_{p,-n}) + \beta'_{-n} T'_{p,n}] \right\}$$

sur (C)

$$d(z\bar{z}) = \frac{1}{Z} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} -n \alpha'_{-n} Z^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha'_n Z^n \right] dZ$$

$$\frac{1}{Z - \tau_p} = - \frac{1}{\tau_p} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n}{\tau_p^{n+1}}$$

Le terme supplémentaire fourni par la seconde des deux intégrales est donc :

$$\sum_{p=1}^N \Gamma_p \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha'_n T'_{p,-n} - \alpha'_{-n} (n \tau'_p \tau_p^{n-1} + T'_{p,n})] \right\}$$

après quelques simplifications, le terme à ajouter dans le moment global en 0 est :

$$\mathcal{R} \left\{ \rho \sum_{p=1}^N \Gamma_p t_p \frac{d\bar{t}_p}{dt} - \rho (\lambda - i\mu) K(Z_1) \sum_{p=1}^N \Gamma_p \left[\frac{1}{Z_1 - \tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} (T_{p,n} Z_1^{n-1} - T_{p,-n} Z_1^{-n-1}) \right] \right\}$$

$$- \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^N \Gamma_p \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} [(\alpha'_n - \beta'_n) T'_{p,-n} - (\alpha'_{-n} - \beta'_{-n}) T'_{p,n} - n \alpha'_{-n} \tau'_p \tau_p^{n-1} + n \beta'_n \tau'_p \tau_p^{n-1}] \right\}$$

Utilisons enfin les axes fixes $O_1 x_1 y_1$ par rapport auxquels le point 0 a pour coordonnées (x_0, y_0) .

La formule :

$$\mathcal{M}_{O_1}^t = \mathcal{M}_O^t - \rho i (x_0 - i y_0) (X_1 + i Y_1)_T$$

donne pour le terme que l'on doit ajouter au moment en O_1 une dérivée par rapport au temps :

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} \Re \left\{ \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} r_p |t_p|^2 - e^{i\theta} (x_0 - iy_0) K(Z_1) \sum_{p=1}^N r_p \left[\frac{1}{Z_1 - \tau_p} \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \sum_{n=1}^{+\infty} (\tau_{p,n} Z_1^{n-1} - T_{p,-n} Z_1^{-n-1}) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N r_p \left[\sum_{n=1}^{+\infty} ((\alpha'_n - \beta'_n) T_{p,-n} - (\alpha'_{-n} - \beta'_{-n}) T_{p,n} + \beta'_n \tau_p^n + \alpha'_{-n} \tau_p^{-n}) \right] \end{aligned}$$

5°) Le multiplan en présence d'un nombre fini de tourbillons libres.

Nous allons, dans ce paragraphe, rattacher les résultats précédents à d'autres, plus généraux, concernant le mouvement d'un multiplan en présence d'un nombre fini de tourbillons libres.

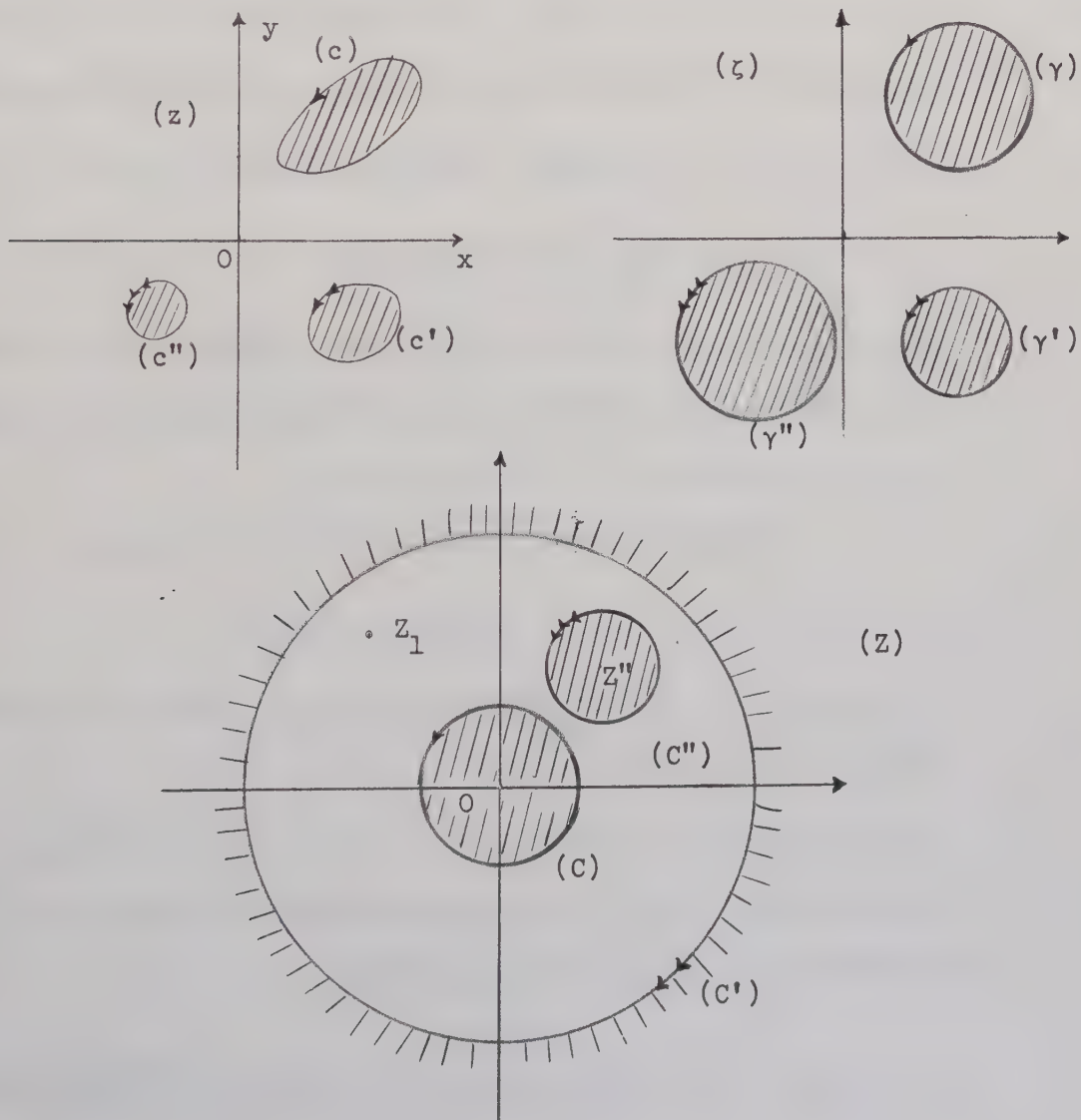
a). La représentation conforme de l'extérieur d'un multiplan sur une couronne circulaire trouée par des cercles.

Koebe a établi le théorème suivant [Bieberbach 1 ; Gaier 1]

tout domaine n -connexe peut être représenté conformément sur un domaine infini dont la frontière se compose de n cercles.

Considérons donc dans le plan (z) un multiplan constitué par n profils (c) , (c') , (c'') , L'extérieur de ce multiplan peut être représenté conformément sur l'extérieur de n cercles (γ) , (γ') , (γ'') , ... d'un plan (ζ) , évidemment extérieurs les uns aux autres. En faisant une inversion complexe centrée au point limite du faisceau défini par (γ) et (γ') qui est intérieur à (γ') ,

nous pouvons le représenter conformément sur le domaine limité par une couronne circulaire du plan (Z) , centrée à l'origine de ce plan, limitée par des cercles (C) et (C') homologues de (γ) et (γ') , (C') étant extérieur à (C) , et trouée par des cercles (C'') , ... homologues de (γ'') , Au point à l'infini du plan (z) correspond un point Z_1 . La correspondance des sens de parcours sur les contours est indiquée sur la figure 21.



[Fig. 21]

La fonction assurant la représentation conforme peut s'écrire :

$$z = H(Z) = \frac{K(Z)}{Z - Z_1}$$

où $K(Z)$ est holomorphe dans la couronne trouée et ne s'annule pas pour $Z = Z_1$.

b). Le potentiel complexe.

Remarquons tout d'abord qu'il est possible d'obtenir un potentiel complexe dû à un tourbillon d'affixe Z_0 , d'intensité Γ_0 situé dans la couronne trouée en prenant ses images successives par rapport aux divers cercles, nous obtenons ainsi comme potentiel :

$$- \frac{i\Gamma_0}{2\pi} [\log(Z - Z_0) + \dots]$$

où les pointillés désignent des termes donnant une circulation nulle autour de chaque cercle et présentent des singularités logarithmiques toutes extérieures à la couronne trouée.

Supposons alors connu le potentiel complexe :

$$G(Z) = \lambda G_1(Z) + m G_2(Z) + \omega G_3(Z)$$

correspondant à des circulations nulles et donnant une vitesse fluide nulle à l'infini du plan (z) .

Pour obtenir ce potentiel complexe $f(z) = F(Z)$ correspondant à des circulations $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \dots$ autour de $(c), (c'), (c''), \dots$ respectivement, nous ajoutons à $G(Z)$:

$$- \frac{i\Gamma}{2\pi} [\log Z + \dots] - \frac{i\Gamma'}{2\pi} [\log(Z - Z') + \dots] - \dots + \frac{i(\Gamma + \Gamma' + \Gamma'' + \dots)}{2\pi} [\log(Z - Z_1)$$

On vérifie aisément que $\frac{df}{dz} = \frac{F'(Z)}{H'(Z)}$ tend vers zéro, quand $Z \rightarrow Z_1$

donc quand $|z| \rightarrow \infty$.

Supposons enfin que le multiplan se meuve en présence de N tourbillons libres d'affixes t_p , d'intensités Γ_p . Si τ_p est l'homologue de t_p dans le plan (Z) , nous ajoutons au potentiel précédent :

$$- \frac{i\Gamma_p}{2\pi} [\log (Z-\tau_p) + \dots]$$

ce qui donne une circulation $-\Gamma_p$ autour de (c') et une circulation nulle autour de chacun des autres profils. Pour compenser, il faut donc ajouter $\sum_{p=1}^N \Gamma_p$ à Γ' comme dans le cas du couple de profils.

D'où le potentiel complexe cherché :

$$\begin{aligned} F(Z) = G(Z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} [\log Z + \dots] - \frac{i\Gamma''}{2\pi} [\log (Z-Z'') + \dots] - \dots \\ + \frac{i(\Gamma + \Gamma' + \Gamma'' + \dots + \sum_{p=1}^N \Gamma_p)}{2\pi} [\log (Z-Z_1) + \dots] \\ - \sum_{p=1}^N \frac{i\Gamma_p}{2\pi} [\log (Z-\tau_p) + \dots]. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$f(z) = f_0(z) - \sum_{p=1}^N \frac{i\Gamma_p}{2\pi} f_p(z)$$

avec :

$f_0(z)$ = potentiel complexe en l'absence de tourbillons, avec les circulations Γ autour de (c) , $\Gamma' + \sum_{p=1}^N \Gamma_p$ autour de (c') , Γ'' autour de (c'') , ...

$$f_p(z) = \log(Z - \tau_p) + \dots \left(z = \frac{K(Z)}{Z - Z_1} \right); - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} f_p(z)$$

introduit une circulation $-\Gamma_p$ autour de (c') , une circulation nulle autour des autres profils.

Nous avons :

$$d' une part : \frac{df_p}{dz} = \frac{\frac{df_p}{dZ}}{H'(Z)} = \frac{\frac{1}{Z - \tau_p} + \dots}{\frac{K'(Z)(Z - Z_1) - K(Z)}{(Z - Z_1)^2}}$$

$\frac{df_p}{dz}$ se comporte donc comme $(Z - Z_1)^2$ au voisinage de $Z = Z_1$

D'où :

$$\frac{df_p}{dz} \sim \frac{\lambda_p}{z^2} \text{ au voisinage de } z \infty,$$

λ_p étant un coefficient dépendant de la géométrie du multiplan et de la configuration tourbillonnaire.

d'autre part :

$$\frac{df_p}{dz} = \frac{\frac{1}{Z - \tau_p} + \dots}{H'(Z)}$$

Puisque $z - t_p = H(Z) - H(\tau_p) = (Z - \tau_p) H'(\tau_p) + \dots$,

$$\frac{df_p}{dz} \sim \frac{1}{z - t_p} \text{ au voisinage de } z = t_p$$

Remarque :

Montrons que le coefficient λ_p se calcule facilement pour un couple de profils.

$$\text{Dans ce cas : } f_p(z) = \log(Z - \tau_p) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{T_{p,n}}{n} Z^n + \frac{T_{p,-n}}{n} Z^{-n} \right)$$

$$\text{Donc : } \frac{df_p}{dz} = \frac{\frac{1}{Z - \tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} (T_{p,n} Z^{n-1} - T_{p,-n} Z^{-n-1})}{\frac{K'(Z)(Z - Z_1) - K(Z)}{(Z - Z_1)^2}}$$

se comporte au voisinage de $Z=Z_1$ comme :

$$-\frac{\frac{1}{Z_1 - \tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} (T_{p,n} Z_1^{n-1} - T_{p,-n} Z_1^{-n-1})}{K(Z_1)} \cdot (Z - Z_1)^2$$

de sorte que :

$$\lambda_p = -K(Z_1) \cdot \left[\frac{1}{Z_1 - \tau_p} + \sum_{n=1}^{+\infty} (T_{p,n} Z_1^{n-1} - T_{p,-n} Z_1^{-n-1}) \right]$$

c) - La condition de liberté des tourbillons.

Nous avons :

$$f_p(z) \sim \log(z - t_p) \quad \text{au voisinage de } z = t_p$$

Nous pouvons donc :

$$f(z) = P_p(z) - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \log(z - t_p)$$

et la condition de liberté du tourbillon d'affixe t_p s'écrit facilement :

$$P'_p(t_p) = \frac{dP_p}{dt} + 2 + i\Gamma_p \omega t_p$$

Dans le chapitre I, nous avons vu comment on pouvait calculer les efforts globaux exercés par le fluide sur le multiplan en l'absence de tourbillons.

Supposons calculés les efforts correspondant au potentiel complexe $f_0(z)$ et déterminons les termes supplémentaires dûs à la présence des tourbillons libres.

d) - La résultante globale.

Utilisons d'abord les axes Ox , Oy liés au multiplan.

Calculons les termes supplémentaires dans :

$$\underline{- i\rho (\lambda - i\mu) \int_{c+c'+\dots} \frac{df}{dz} dz .}$$

Nous obtenons :

$$- i\rho (\lambda - i\mu) \sum_{p=1}^N \int_{c+c'+\dots} - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \cdot \frac{df}{dz} dz$$

donc :

$$i\rho (\lambda - i\mu) \sum_{p=1}^N \Gamma_p$$

$$\underline{- \rho\omega \int_{c+c'+\dots} z \frac{df}{dz} dz .}$$

Nous devons ajouter dans $\int_{c+c'+\dots} z \frac{df}{dz} dz$:

$$\sum_{p=1}^N - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \int_{c+c'+\dots} z \frac{df}{dz} dz$$

En utilisant les propriétés de $\frac{df}{dz}$, nous constatons que les résidus au point t_p et au point à l'infini de la fonction $z \frac{df}{dz}$ sont respectivement t_p et $-\lambda_p$, de sorte que :

$$- \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \int_{c+c'+\dots} z \frac{df}{dz} dz = \Gamma_p (\lambda_p - t_p)$$

Le terme supplémentaire est donc :

$$- \rho \omega \sum_{p=1}^N \Gamma_p \overline{(\lambda_p - t_p)}$$

$$\frac{i\rho \int_{c+c'+\dots} \frac{\partial f}{\partial t} dz}{}$$

Nous devons ajouter dans $\int_{c+c'+\dots} \frac{\partial f}{\partial t} dz$:

$$\sum_{p=1}^N - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \int_{c+c'+\dots} \frac{\partial f}{\partial t} dz$$

comme $f_p(z) \sim \log(z - t_p)$ au voisinage de $z = t_p$ et $f_p(z) \sim -\frac{\lambda_p}{z}$ au voisinage de $z \infty$, les résidus de $\frac{\partial f}{\partial t}$ au point t_p et au point à l'infini sont respectivement $-\frac{dt}{dt}$

et $\frac{d\lambda}{dt}$, de sorte que :

$$- \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \int_{c+c'+\dots} \frac{\partial f}{\partial t} dz = \Gamma_p \left(\frac{dt}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} \right)$$

Le terme supplémentaire est donc :

$$- i\rho \sum_{p=1}^N \Gamma_p \overline{\left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{dt}{dt} \right)}$$

$$\frac{i\rho}{2} \int_{c+c'+\dots} \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz$$

Les singularités de la fonction $\frac{df}{dz}$ sont le point à l'infini et les points $z = t_p$. Comme $\frac{df}{dz}$ se comporte à l'infini comme $\frac{1}{z}$, le résidu à l'infini de $\left(\frac{df}{dz} \right)^2$ est nul. Donc, si R_{t_p} désigne le résidu de cette fonction correspondant au pôle double t_p , nous pouvons écrire :

$$\frac{i\rho}{2} \int_{c+c'+\dots} \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz = \pi\rho \sum_{p=1}^N R_{t_p}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} R_{t_p} &= \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{dP_p}{dz} - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \cdot \frac{1}{z-t_p} \right)^2 \cdot (z-t_p)^2 \right]_{z=t_p} \\ &= - \frac{i\Gamma_p}{\pi} \cdot \frac{dP_p(t_p)}{dz} \end{aligned}$$

Le terme supplémentaire est donc :

$$- i\rho \sum_{p=1}^N \Gamma_p \frac{dP_p(t_p)}{dz}$$

donc en utilisant les conditions de liberté des tourbillons :

$$- i\rho \sum_{p=1}^N \Gamma_p \overline{\left(\frac{dt_p}{dt} + \lambda + im + i\omega t_p \right)}$$

Finalement, en faisant la somme des résultats précédents et en prenant sa conjuguée, nous obtenons comme terme à ajouter dans $X_T + iY_T$:

$$i\rho \sum_{p=1}^N \Gamma_p \left(\frac{d\lambda_p}{dt} + i\omega\lambda_p \right)$$

Si maintenant nous utilisons les axes fixes $O_1 x_1 y_1$, nous voyons que les termes à ajouter dans $(X_1 + iY_1)_T$ se mettent sous la forme d'une dérivée par rapport au temps :

$$i\rho \frac{d}{dt} \left(\sum_{p=1}^N \Gamma_p \lambda_p e^{i\theta} \right)$$

Remarque.

Dans le cas du couple de profils, si nous remplaçons les λ_p par leurs valeurs calculées plus haut, nous retrouvons bien la formule (V.3.2).

e) - Le moment global.

Pour le moment global au point 0, nous allons calculer les termes supplémentaires dans les intégrales suivantes (dont nous devons prendre les parties réelles) :

$$-\frac{\rho}{2} \int_{c+c'+\dots} z \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz.$$

Appelons R_∞ et R_{t_p} le résidu à l'infini et le résidu au point t_p de la fonction $z \left(\frac{df}{dz}\right)^2$

L'intégrale vaut :

$$2\pi\rho \left(R_\infty + \sum_{p=1}^N R_{t_p} \right)$$

Or :

$$\frac{df}{dz} = \frac{df_0}{dz} - \sum_{p=1}^N \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \cdot \frac{df_p}{dz}$$

Comme $\frac{df_p}{dz} \sim \frac{\lambda_p}{z^2}$ à l'infini, R_∞ est le résidu à l'infini de $z \left(\frac{df_0}{dz}\right)^2$, donc ne fournit pas un terme supplémentaire.

Nous devons donc ajouter :

$$2\pi\rho \sum_{p=1}^N R_{t_p}.$$

Or :

$$R_{t_p} = \frac{d}{dz} \left[z (P'_p(z) - \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \cdot \frac{1}{z-t_p})^2 (z-t_p)^2 \right]_{z=t_p}$$

$$= - \frac{\Gamma_p^2}{4\pi^2} - \frac{i\Gamma_p}{\pi} t_p P'_p(t_p)$$

Le terme supplémentaire est donc :

$$R_p \sum_{p=1}^N \Gamma_p t_p P'_p(t_p)$$

$$\rho(l-im) \int_{c+c'+\dots} z \frac{df}{dz} dz .$$

L'intégrale a été déjà calculée. Le terme supplémentaire correspondant

$$R_p(l-im) \sum_{p=1}^N \Gamma_p (\lambda_p - t_p)$$

$$- \frac{\rho}{2} \int_{c+c'+\dots} \frac{\partial f}{\partial t} d(z\bar{z}) .$$

Le calcul du terme supplémentaire correspondant :

$$\frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^N \frac{i\Gamma_p}{2\pi} \int_{c+c'+\dots} \frac{\partial f_p}{\partial t} d(z\bar{z})$$

semble exiger la connaissance de la fonction $H(Z)$ comme dans le cas du profil isolé et du couple de profils.

Nous allons cependant préciser la structure de ce terme.

Nous avons :

$$f_p = \log(Z - t_p) + \dots$$

où les pointillés représentent une somme de termes de la forme

$\pm \log (Z - \theta_p)$, les θ_p désignant les images successives de τ_p .

Par suite :

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = - \frac{\tau_p'}{Z - \tau_p} + \text{termes de la forme } \frac{\pm \theta_p'}{Z - \theta_p}$$

Or l'intégrale :

$$\int_{c+c'+\dots} \frac{\theta_p'}{Z - \theta_p} d(z\bar{z})$$

qui est égale au produit de θ_p' par une fonction de θ_p est la dérivée par rapport au temps d'une fonction de θ_p .

Le terme supplémentaire est donc de la forme :

$$- \frac{\rho}{2} \Re \frac{d\mathcal{F}}{dt}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction dépendant de la géométrie du multiplan et de la configuration tourbillonnaire.

Finalement, le terme à ajouter dans le moment global en 0 est :

$$\rho \Re \left[\sum_{p=1}^N \Gamma_p \tau_p \frac{\overline{dt}}{dt} + (\ell - im) \sum_{p=1}^N \Gamma_p \lambda_p - \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{F}}{dt} \right]$$

Utilisons enfin les axes fixes $O_1 x_1 y_1$ par rapport auxquels le point 0 a pour coordonnées (x_0, y_0) .

La formule :

$$M_{O_1}^t = M_O^t - R i (x_O - iy_O) (X_1 + iY_1)_T$$

donne pour le terme que l'on doit ajouter au moment en O_1 une dérivée par rapport au temps :

$$\rho \frac{d}{dt} R \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \Gamma_p |t_p|^2 + (x_O - iy_O) \Gamma_p \lambda_p e^{i\theta} - \frac{\mathcal{F}}{2} \right]$$

---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---:---

B I B L I O G R A P H I E

BIEBERBACH L. .

- [1] Einführung in die konformen Abbildung. Sammlung Götschen .
Band 768 - Berlin 1949 .

COUCHET G. .

- [1] C.R. Acad. Sc. Paris. 11Juin 1945.
[2] Publication O.N.E.R.A. n° 56 - Paris - 1962.
[3] C.R. Acad. Sc. Paris. 20 Avril 1960.
[4] Mouvements plans d'un fluide en présence d'un profil mobile.
Mémorial des Sciences Mathématiques. Fascicule CXXXV - Paris -
Gauthier-Villars - 1956.

DUPONT P. .

- [1] Théorie du biplan indéfini. Proc. 3 rd. Internat. Congr. Appl.
Mech. - Stockholm 1931.- Vol. 1 - p. 372-386.

FERRARI C. .

- [1] Sulla trasformazione conforme di due cerchi in due profili
alari. Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino,
Serie II, Vol. LXVII , N° 2 - 1930.

GAIER D. .

- [1] Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Springer Tracts
in Natural Philosophy - Volume 3 - Springer Verlag - 1964 .

GIRERD H. .

- [1] Contribution à l'étude expérimentale du biplan d'envergure infinie. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'air - 1934.

GLAUERT H. .

- [1] Aérodynamique - Ailes portantes et hélices. Traduction en français - Paris - Dunod - 1947.

KOBER H. .

- [1] Dictionary of conformal representations. Dover publications. Inc. - Second edition - 1957 .

KOMATU Y. .

- [1] Existence theorem of conformal mapping of doubly-connected domains - Kōdai Math. Sem. Rep. - Nos 5-6 - p. 83-84 - Dec. 1949.
- [2] Die Geschwindigkeitspotential und die Kutta-Joukowskischen Bedingungen für die Strömungen in Vielfach zusammenhängenden Gebieten. Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo - 1945 .- I - Volume 21 - p. 6-15 ; II - Volume 22 - p. 83-

KOTSCHIN N.J. , KIBEL I.A. , ROSE N.W. .

- [1] Theoretische Hydromechanik. Berlin - Akademie Verlag - 1954-1955 .
Tome I .

LAGALLY M. .

- [1] Die reibungslose Strömung im Aussengebiet zweier Kreise.
Z. angew. Math. Mech. 9 - p. 299 - 305 - 1929.

LAMB H. .

- [1] Hydrodynamics - 6^{ième} édition - Cambridge - University Press.
1959 .

LERAY J. .

- [1] Les cahiers d'aérodynamique . N° 7 - Sept-Oct. 1947.

MOREAU J.J. .

- [1] Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel - Thèse - Paris -
Gauthier-Villars - 1949 .
- [2] Sur la détermination des efforts exercés par un fluide sur un
solide en mouvement. Bulletin de la Société française des Mé-
caniciens. Septembre 1951.

NEHARI Z. .

- [1] Conformal Mapping - Mc. Graw - Hill Book Bompany, Inc. - First
edition - 1952.

PERES J. .

- [1] C.R. Acad. Sc. Paris - (t. 189) - 1929.
- [2] C.R. du 3^{ème} Congrès International de Mécanique de Stockholm -
1930 .
- [3] Cours de Mécanique des Fluides - Paris - Gauthier-Villars - 1936.
- [4] Calcul de la circulation autour d'un profil placé dans un
courant quelconque - Volume jubilaire de M. Marcel Brillouin -
Paris - Gauthier-Villars - 1935.

PISTOLESI E. .

- [1] Aerodinamica - Torino - Unione tipografica - Editrice torinese - 1932 .

SCHMITT P. .

- [1] Ailes à fentes ; biplans ; interaction-sol ; calculs et applications .- O.N.E.R.A. - Rapport technique N° 44 - 1950.

SEDOV L.J. .

- [1] Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics. Traduction en anglais. New-York - Interscience Publishers - 1964.

TANNERY J. et MOLK J. .

- [1] Eléments de la théorie des fonctions elliptiques - Tome II - Paris - Gauthier-Villars - 1896.

TOMOTIKA S. , NAGAMIYA T. , TAKENOUTI Y. .

- [1] The lift on a flat plate placed near a plane wall, with special reference to the effect of the ground upon the lift of a monoplane aerofoil . Report of the aeronautical research Institute - Tokyo Imperial University - Volume VIII - Août 1933 - n° 97.

TOMOTIKA S. .

- [1] The lift on a flat plate placed in a stream between two parallel walls and some allied problems - Report of the aeronautical research Institute - Tokyo Imperial University. Vol. VIII - Janvier 1934 - n° 101 .

TOUSSAINT A . .

- [1] Théorie approchée des cellules sustentatrices biplanes d'envergure infinie. Note placée à la fin du mémoire déjà cité de H. Girerd.

VILLAT H. .

- [1] Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire. Rendiconti del circolo matematico di Palermo - t. 33 - 1912.
- [2] Sur la représentation conforme des aires doublement connexes. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure - 3^{ème} série - Tome 38 - 1921 .
- [3] Leçons sur l'hydrodynamique - Paris - Gauthier-Villars - 1929.

-:-:-:-:-:-:-:-

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
Introduction .	

--:--:--:--:--

Chapitre 1

Généralités sur le calcul des efforts aérodynamiques qui s'exercent sur le multiplan.

1°) Les conditions aux limites.	2
2°) Les efforts globaux exercés par le fluide sur le multiplan.	2
3°) Mise en évidence de la contribution des circulations.	3
4°) Les efforts dans le cas où les circulations sont nulles.	5
5°) Réduction des efforts globaux. Axes principaux du multiplan.	7
6°) Les équations du mouvement du multiplan.	12

--:--:--:--:--

Chapitre II

La représentation conforme de l'extérieur d'un couple de profils sur une couronne circulaire.

1°) Théorème d'existence.	16
2°) Unicité de la représentation conforme	19
3°) Les diverses formes de la fonction effectuant la représentation conforme.	19
4°) Aire des profils.	23
5°) Centre d'inertie des profils.	24

6°)	Cas particuliers de couples de profils symétriques.	26
7°)	Cas des profils à pointe.	28
8°)	Exemple : le biplan droit.	29
9°)	Retour sur le cas des couples de profils symétriques.	33

-:-:-:-:-

Chapitre III

Le potentiel complexe.

1°)	Conditions auxquelles doit satisfaire le potentiel complexe.	40
2°)	Détermination d'une fonction holomorphe dans une couronne circulaire connaissant les valeurs que prend sa partie imagi- naire sur les circonférences frontières.	41
3°)	Le potentiel sans circulation autour des profils.	43
4°)	La théorie des images hydrodynamiques par rapport à une couronne circulaire.	46
5°)	Le potentiel complexe avec circulation données autour des profils.	53
6°)	Une forme remarquable du potentiel com- plexe dans le cas de la translation.	55
7°)	Le cas où les profils présentent chacun une pointe.	59
8°)	Existence et étude cinématique des mou- vements à circulations constantes des couples de profils à pointes.	66
9°)	Examens de quelques cas particuliers.	70

-:-:-:-:-

Chapitre IV

Le calcul des efforts aérodynamiques

Remarque préliminaires	77
1°) La résultante des efforts globaux.	78
2°) Le moment résultant des efforts globaux.	82
3°) Pseudo résultante cinétique et pseudo moment cinétique du fluide. Axes principaux du couple de profils. Force vive du fluide.	86
4°) La translation uniforme.	89
5°) La rotation uniforme	90
6°) Les profils sont deux cercles égaux.	92
7°) Les profils sont symétriques par rapport à l'origine.	96
8°) Les profils sont symétriques par rapport à l'axe réel.	98
9°) Le cas des biplans droits	101
10°) Le calcul des efforts aérodynamiques s'exerçant sur un profil.	103

==

Chapitre V

Le calcul des efforts aérodynamiques s'exerçant sur un couple de profils sans pointe animé d'un mouvement arbitraire en présence d'un nombre fini de tourbillons libres.

1°) Le potentiel complexe.	104
2°) La condition de liberté des tourbillons.	106

3°) La résultante globale.	107
4°) Le moment global.	111
5°) Le multiplan en présence d'un nombre fini de tourbillons libres.	115

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE.	128
TABLE DES MATIERES.	

-:-:-:-:-

DEUXIEME THESE

ETUDE DE LA STABILITE DES SOLUTIONS

DES SYSTEMES DIFFERENTIELS PAR LA

METHODE DE LIAPOUNOFF .

Vu et permis d'imprimer
MONTPELLIER le

Le Recteur de l'Académie
de MONTPELLIER,

Vu et approuvé
MONTPELLIER, le

Le Doyen de la Faculté
des Sciences,

